

Technische Universität München

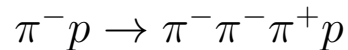
Fakultät für Physik

Institut für Hadronische Strukturen und Fundamentale Symmetrien



Bachelorarbeit zum Thema:

**Untersuchung von Normierungsintegralen in  
Partialwellenanalysen anhand der Reaktion**



Zur Erlangung des Grades Bachelor of Science

vorgelegt von:

Kumschier Tom  
An der Schwärz 4  
89437 Haunsheim

Matrikelnummer.: 03688472  
Fachsemester.: 6  
Studiengang: Physik  
Fachrichtung: Kern-, Teilchen- und Astrophysik

Gutachter: Stephan Paul  
Zweitgutachter: Allen C. Caldwell

Abgabetermin: 30.08.2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Produktion von angeregten Mesonen . . . . .	2
1.2	Partialwellenanalyse . . . . .	3
1.3	Maximum Likelihood Estimation . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Statistische Unsicherheit des Integralmatrixelements</b>	<b>7</b>
2.1	Theorie der Monte-Carlo-Integration . . . . .	7
2.2	Bestimmung der statistischen Unsicherheit . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Bestimmung der Intensitätsunsicherheit</b>	<b>11</b>
3.1	Masse $m_{3\pi} = 1800$ MeV . . . . .	11
3.2	Masse $m_{3\pi} = 1000$ MeV . . . . .	15
3.3	Jackknife Methode . . . . .	17
3.3.1	Theorie der Jackknife-Methode . . . . .	17
3.3.2	Bestimmung der Unsicherheit . . . . .	18
3.4	Verschiedene MLE-Datensätze . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Massenabhängigkeit der Integralmatrix</b>	<b>20</b>
4.1	Binning . . . . .	20
4.2	Modellierung . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>26</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>28</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>29</b>
	<b>Literatur</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Verwendete Programme</b>	<b>31</b>

# 1 Einleitung

Die QCD ist die Theorie der starken Wechselwirkung und beschreibt die Wechselwirkungen von Quarks durch den Austausch von Gluonen. Bei niedrigen Energien finden das sogenannte *confinement* statt, das heißt, dass die Quarks und Gluonen in Hadronen gebunden sind. Bei höheren Energien kann eine analytische Betrachtung der QCD-Gleichungen nicht mithilfe von Störungsrechnungen betrachtet werden, da für die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s = \mathcal{O}(1)$  gilt. Aus diesem Grund ist das Verständnis von Hadronen und ihren Eigenschaften im Rahmen des Standardmodells der Teilchen ein noch offenes Problem, welches durch die Vermessung von Anregungsspektren minimiert werden soll. Viele Projekte, darunter das COMPASS Experiment am CERN [3], widmen sich dieser Aufgabe.

Ein aktuelles Ziel bei diesem Experiment ist die Bestimmung des Anregungsspektren leichter Mesonen, d. h.  $q\bar{q}$ -Zustände, die aus up, down oder strange Quarks bestehen. Diese werden durch den Beschuss der Protonen mithilfe von Pionen mit einer Energie von 190 GeV erzeugt. Die Mesonen besitzen jedoch nur eine sehr kurze Lebensdauer und zerfallen typischerweise in leichte Endzustandsmesonen wie z. B.  $\pi, K, \eta \dots$ . In Anzahl der erzeugten Endzustände hängt von der Anregungsenergie ab, in diesem Fall entsteht meist ein Vierkörperendzustand. Die angeregten Mesonen treten als Zwischenzustände auf und können Quantenmechanisch interferieren, und die Rekonstruktion der kinematischen Verteilung müssen durch die Endzustandsteilchen ermittelt werden. Beide Aufgaben werden durch die Partialwellenanalyse durchgeführt.

Diese Ausarbeitung befasst sich mit der Software ROOTPWA [21], die zur Auswertung der Hadronenspektroskopiedaten herangezogen wird. Diese Daten werden beim COMPASS-Experiment erzeugt, welches eine Kollaboration von verschiedenen Universitäten ist. [1, 2]. Aufgrund der verwendeten Maximum Likelihood Methode (Abschnitt 1.3) treten in der Analyse Normierungsintegrale auf, die aufgrund ihrer hohen Dimensionalität mithilfe der Monte-Carlo-Methode (Abschnitt 2.1) berechnet werden müssen. Die dabei auftretenden statistischen Unsicherheiten der Integralwerte werden bisher in der Analyse vernachlässigt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Unsicherheit zu berechnen (Abschnitt 2) und zu bestimmen, wie sie sich auf die Ergebnisse der PWA fortpflanzen (Abschnitt 3). Im Abschnitt 1.2 wird die Methode der Partialwellenanalyse näher erläutert. Die Partialwellenanalyse wird technisch in unabhängigen Intervallen durchgeführt. Das bedeutet, dass kein kontinuierliche Massenverlauf betrachtet wird, sondern dass die Daten in einzelne Massenintervalle zusammengefasst werden. Die Berechnung der PWA erfolgt auf diese Intervalle, wobei eine Neuberechnung der Integrale bei einer Änderung des Intervallbereichs eine aufwendige Aufgabe darstellt. Aus diesem Grund soll in Abschnitt 4 nach Möglichkeiten gesucht werden, die die Berechnung der Normierungsintegrale weitgehend unabhängig davon durchführen.

## 1.1 Produktion von angeregten Mesonen

Compass ist ein Streuexperiment, bei dem durch Kollision von Hadronen neue Informationen über die starke Wechselwirkung gewonnen werden. Hierbei interagiert ein einlaufendes Strahlteilchen  $a$  mit dem Target  $b$  über die starke Wechselwirkung und erzeugt ein angeregtes Hadron  $X$ , das dann über die starke Wechselwirkung zerfällt. In Abbildung 1 ist dies schematisch dargestellt.

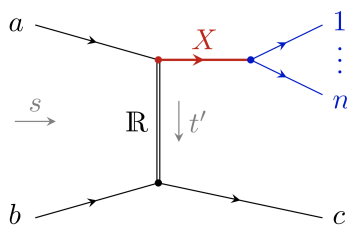


Abbildung 1: Die Erzeugung eines angeregten Zwischenzustandes  $X$  durch Wechselwirkung des einlaufenden Strahlteilchens  $a$  mit dem Targetteilchen  $b$ . Der Zwischenzustand  $X$  zerfällt anschließend [4].

Dieser Prozess kann in zwei Teilprozesse aufgespalten werden, die einzeln zu betrachten sind:

1. Der inelastischer Zwei-Körper-Streuprozess  $a + b \rightarrow X + c$ .
2. Der Zerfall des Zwischenzustandes  $X$  in  $n$  Tochterteilchen  $X \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$

Im Compass Experiment ist für das einlaufende Strahlteilchen  $a$  ein  $\pi^-$  und das Targetteilchen  $b$  ein Proton verwendet. Aufgrund der kurzen Lebensdauer der Zwischenteilchen  $X$  von  $\tau_X = \mathcal{O}(10^{-24} \text{ s})$  können diese im Detektor nicht beobachtet werden. Stattdessen werden nur die Zerfallsteilchen von  $X$  detektiert. In dieser Arbeit betrachten wir den Zerfall des  $X$ -Teilchen in drei geladene Pionen, da für diesen Zerfallskanal der größte Datensatz zu Verfügung steht. In Abbildung 2 dieser Zerfall des Teilchens  $X$  dargestellt.

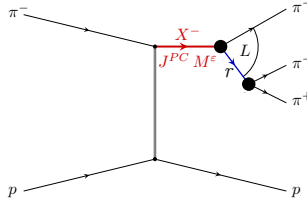


Abbildung 2: Detaillierte Darstellung des Zerfall von dem Zwischenzustandes  $X$  in drei geladene Pionen.

Allgemein kann für jeden Teilchenreaktion über Fermis Goldene Regel

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |M_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \cdot V \quad (1)$$

der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  berechnet werden [20]. Hierbei beschreibt  $v_a$  die Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen,  $V$  das Volumen, in das die Strahlteilchen gestreut werden und  $\rho(E')$  ist die Dichte der Endzustände, welche die Energie  $E'$  besitzen.  $M_{fi}$  wird als Übergangsmatrixelement oder auch als Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang bezeichnet. Für den betrachtenden Prozess  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ p$  hängt für eine konstante Strahlenergie das Matrixelement von folgenden Variablen ab. Hierbei beschreibt

- $m_X$ : die Masse des kurzlebigen Teilchen  $X$ ,
- $t$ : die Mandelstam-Variablen, die das Quadrat des Viererimpuls-Übertrags repräsentiert
- $\tau$ : eine Satz von 5 kinematischen Variablen, die den 3-Körper-Zerfall  $X \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+$  eindeutig festlegen.

Dadurch folgt für die Intensitätsverteilung der Endzustandsteilchen

$$\mathcal{I}(m_x, t, \tau) \propto |M_{fi}(m_X, t, \tau)|^2. \quad (2)$$

Da für Resonanzen Produktion und Zerfall des Zwischenzustands voneinander unabhängig sind, kann die Amplitude in zwei Teilamplituden aufgeteilt werden: i) Eine Amplitude  $\mathcal{T}(m_X, t)$ , die die Produktion und die Propagation des Teilchens  $X$  beschreibt; ii) und eine zweite Amplitude  $\Psi(m_X, \tau)$  die den Zerfalls von  $X$  in drei Pionen beschreibt.

## 1.2 Partialwellenanalyse

Da immer derselbe Anfangs- und Endzzstand auftauchen können verschiedene Zwischenzustände  $X$  interferieren, d. h.

$$I(m_X, t, \tau) = \left| \sum_{i=1}^{N_{\text{Ereignis}}} \mathcal{T}_i(m_x, t) \Psi_i(m_X, \tau) \right|^2, \quad (3)$$

wobei  $i$  der *Partialwellenindex* ist. Es gilt:  $i = J^{PC} M^{\epsilon} R \pi L$ .

Dieses Schema setzt sich aus zwei Teilen zusammen: i)  $J^{PC} M^{\epsilon}$  sind die Quantenzahlen den Zwischenzustands  $X$ , ii) und der zweite Teil  $R \pi L$  beschreibt den Zerfall. Die einzelnen Elemente sind:

- J: Spin des Zwischenzustands  $X$ .
- P: Parität von  $X$ , also wie sich die Wellenfunktion gegenüber einer Räumlichen Spiegelung verhält.
- C: Beschreibt die Ladungskonjugation, also das Verhalten wenn das Teilchen mit seinem Antiteilchen vertauscht wird.
- M: Betrag der Spinprojektion von  $X$  entlang der Strahlachse.
- $\epsilon$ : Entspricht der Naturalität des Austauschteilchens.
- r: Gibt den Namen des Teilchens an, das als  $\pi^- \pi^+$  Zwischenzustand auftaucht.
- $\pi$ : Das zweite auslaufende Teilchen  $\pi^-$  beim Zerfall  $X \rightarrow r + \pi^-$  (siehe Abbildung 2).
- L: Relativer Bahndrehimpuls zwischen Teilchen  $r$  und  $\pi^-$  im Zerfall  $X \rightarrow r + \pi^-$  in spektroskopischer Notation. Analog zum gebundenen Elektron im Atom werden zur Nomenklatur Buchstaben (S-Welle:  $l = 0$ , P-Welle:  $l = 1$ , D-Welle:  $l = 2$ ) verwendet.

Damit die Formel (3) angewendet werden kann, muss die Annahme gemacht werden, dass der 3-Körper-Zerfall eine Sequenz von zwei Zwei-Körper-Zerfällen beschreibt, und somit, wie in Abbildung 2 zu sehen, ein weiterer Zwischenzustand  $r$  existiert. Dies kann nur ein  $\pi^- \pi^+$  Zwischenzustand sein, da für die Kombination  $\pi^- \pi^-$  keine Resonanzen vorhanden sind.

In dieser Arbeit wird das PWA-Modell aus [3] verwendet. Dieses besitzt insgesamt 88 verschiedene Wellen, also 88 verschiedene Kombinationen von der  $X$ -Quantenzahl mit der Zerfallskanälen. Für die Formel (3) ist  $\Psi_i$  bekannt, und die Unbekannte  $\{\mathcal{T}_i\}$  soll durch die Maximum-Likelihood-Methode mithilfe der gemessenen Intensitätsverteilung bestimmt werden. Da die beiden Parameter  $m_X$  und  $t$  unbekannt sind, werden diese in Intervalle zerlegt, wobei für diese Ausarbeitung beide Parameter konstant gehalten werden.

### 1.3 Maximum Likelihood Estimation

Die Maximum Likelihood Estimation (MLE) ist ein Schätzverfahren, welches die Parameter für ein gegebenes Modell bestimmt, wobei das Modell eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sein muss. Die Werte für die Parameter werden so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Datensatzes maximiert wird.

Als erster Schritt zur Bestimmung der Parameterwerte  $\vec{\theta}$  wird die Maximum Likelihoodfunktion aufgestellt.

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{X}) = \prod_{i=1}^{N_{\text{Ereignis}}} f(\vec{\theta}, X_i) \quad (4)$$

$f(\vec{\theta}, X_i)$  ist die Modellfunktion, d. h. die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der unabhängigen Zufallsvariablen  $X_i$ , welcher ebenfalls vom Parameter  $\vec{\theta}$  abhängt. Das Ziel ist es,  $\mathcal{L}$  zu maximieren, was bedeutet, dass von dieser Funktion die Ableitung gebildet werden muss. Da eine Ableitung von Produkten jedoch schwierig und langwierig zu bilden ist, wird zuvor die Funktion (4) mithilfe

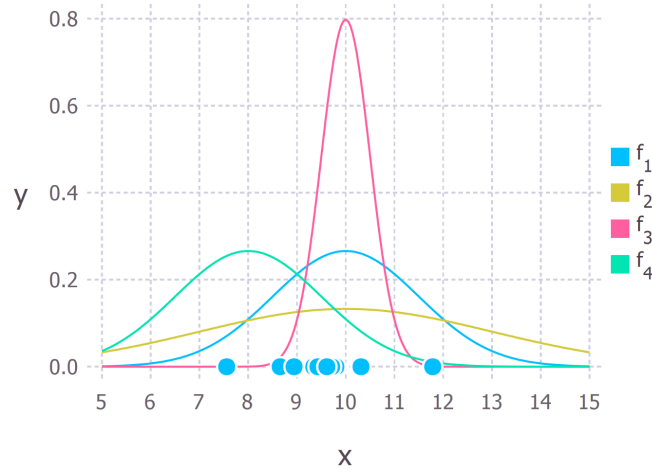


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Maximum Likelihood Estimation [7].

des Logarithmus umgeformt:

$$\ln [\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{X})] = \ln \left[ \prod_{i=1}^{N_{\text{Ereignis}}} f(\vec{\theta}, X_i) \right] \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{\text{Ereignis}}} \ln [f(\vec{\theta}, X_i)] \quad (6)$$

Dadurch wird das Produkt von Funktionen in eine Summe umgewandelt. Dies ist mathematisch erlaubt, da der Logarithmus monoton steigend ist und die Funktion (6) bei demselben Parameter  $\vec{\theta}$  ein Maximum annimmt wie die ursprüngliche Funktion (4). Nach dieser Vereinfachung wird die Ableitung gebildet

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \ln [\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{X})] \Big|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7)$$

und Null gesetzt, damit das Maximum bestimmt werden kann. Ist nun das Maximum der Funktion in Abhängigkeit von  $\vec{\theta}$  ermittelt, so ist  $\hat{\vec{\theta}}$  der Maximum Likelihood Schätzer [7, 11]. In Abbildung 3 ist das Prinzip graphisch dargestellt. Die blauen Punkte sind experimentell bestimmte gaußverteilte Messwerte. Die Funktion  $f_1$  bis  $f_4$  sind Gaußfunktionen mit unterschiedlichen Parametern  $\vec{\theta}$ . Das Ziel der MLE ist es, die Parameterwerte so zu optimieren, sodass die Übereinstimmung der theoretischen Verteilung mit den Daten maximiert wird.

Die Maximum-Likelihood-Estimation ist ein Schätzverfahren, das eine eigene Unsicherheit besitzt. Zur Ermittlung dieser Unsicherheit kann die Hessematrix am Minimum bestimmt werden, und durch die Invertierung wird daraus die Kovarianzmatrix der Partialwellenamplituden.

In dem hier betrachteten Streuexperiment ist die Anzahl der Datenpunkte nicht vorgegeben, sondern variiert mit der Messdauer und ist damit ebenfalls eine Zufallsvariable. Die Likelihood Funktion kann mithilfe der Poissonverteilung und dem dazugehörigen Erwartungswert  $\lambda$  um diese zusätzliche Variable erweitert werden. In diesem Fall ergibt sich die erweiterte Likelihood Funktion zu

$$\mathcal{L}_{\text{erw}}(\vec{\theta}, \lambda; \vec{X}, N) = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!} \cdot \prod_{i=1}^N f(\vec{\theta}, X_i), \quad (8)$$

wobei  $N$  die Anzahl der gemessenen Ereignisse beschreibt. Mithilfe unseres Modells für die Intensitätsverteilung ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für konstantes  $m_X$  und  $t$  zu

$$f(\tau; \mathcal{T}_i) \propto \frac{\mathcal{I}(\tau; \{\mathcal{T}_i\})}{\int d\varphi_3(\tau') \eta(\tau') \mathcal{I}(\tau'; \{\mathcal{T}_i\})} \quad (9)$$

Die Integrationsvariable  $\varphi_3(\tau')$  beschreibt die differentiellen lorentzinvarianten Phasenraumelement für den 3-Körper Endzustand und  $\eta(\tau')$  die Akzeptanz des Detektors. Als zusätzliche Normierungsbedingung verlangen wir

$$\lambda(\{\mathcal{T}_i\}) = \int d\varphi_3(\tau') \eta(\tau') \mathcal{I}(\tau'; \{\mathcal{T}_i\}) \quad (10)$$

Einsetzen von Formeln (9) und (10) in Formel (8) und Vernachlässigung von Termen, die unabhängig von den  $\{\mathcal{T}_i\}$  sind, ergibt die Likelihood Funktion

$$\begin{aligned} & \ln [\mathcal{L}_{\text{erw}}(\{\mathcal{T}_i\}; \{\tau_{n,k}\}, N)] \\ &= \sum_{k=1}^{N_{\text{Ereignis}}} \ln [\mathcal{I}(\tau_{n,k}; \{\mathcal{T}_i\})] - \lambda(\mathcal{T}_i) \\ &\propto \sum_{k=1}^{N_{\text{Ereignis}}} \ln \left| \sum_i^{N_{\text{Wellen}}} \mathcal{T}_i \Psi_i(\tau_{n,k}) \right|^2 - \sum_{i,j}^{N_{\text{Wellen}}} \mathcal{T}_i \mathcal{T}_j \underbrace{\int d\varphi_3(\tau) \Psi_i(\tau) \Psi_j^*(\tau)}_{\equiv I_{ij}} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Übergangsamplitude  $\mathcal{T}(t)$  in der Formel (11) ist nicht von den Phasenraumvariablen  $\tau$  abhängig und kann dadurch vor das Integral gezogen werden. Durch die Separation hängen die in Gleichung (11) definierten Integralmatrix  $I_{ij}$  nur von den bekannten Zerfallsamplituden ab und kann deshalb vorberechnet werden. [4].

## 2 Statistische Unsicherheit des Integralmatrixelements

In Abschnitt 1.3 wurde die Integralmatrix  $I_{ij}$  eingeführt. In der bisherigen Verwendung von  $I_{ij}$  werden nur die Werte der einzelnen Elemente betrachtet, nun soll ebenfalls die statistische Unsicherheit analysiert werden. Zunächst soll die Methode zur Berechnung des in Abschnitt 1.3 definierten Integralmatrixelements dargestellt werden.

### 2.1 Theorie der Monte-Carlo-Integration

Das Integral einer Funktion  $f$  ist allgemein definiert durch

$$I = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \, d^n \vec{x}. \quad (12)$$

Lässt sich das Integral  $I$  jedoch nicht analytisch berechnen, kann  $I$  approximiert werden, indem aus der Definitionsmenge  $\Omega$  zufällige, gleichmäßig verteilte Punkte  $\vec{x}_i$  generiert werden, um damit das Integral zu schätzen [6]. Dadurch folgt

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{V}{N} \sum_i f(\vec{x}_i) \\ &= V \langle f \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

mit dem Volumen

$$V = \int_{\Omega} d^n \vec{x} \quad (14)$$

wobei durch das Gesetz der großen Zahlen  $I \rightarrow I_N$  für  $N \rightarrow \infty$  gilt. Dies lässt sich dadurch begründen, dass die Riemannsche Summe eines Integrals nicht von der speziellen Zerlegung des Integrationsintervalls abhängt. Aus diesem Grund können zufällig ausgewählte Abzissenwerte für die Approximation verwendet werden, welches zu dem Monte-Carlo Schätzwert des Integrals führt [8]. Mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes lässt sich der Fehler für die Monte-Carlo-Integration bestimmen. Hierfür wird die Varianz des Integrals  $I_N$

$$\text{Var}[I_N] = \frac{V^2}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}[f], \quad (15)$$

benötigt, wobei die Varianz einer Funktion  $f$  über

$$\text{Var}[f] \equiv \sigma_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (f(\vec{x}_k) - \langle f \rangle)^2 \quad (16)$$

definiert ist. Wird nun die Formel (16) in die Formel (15) eingesetzt, so folgt daraus

$$\text{Var}[I_N] = \frac{V^2}{N} \text{Var}[f] = \frac{V^2}{N} \sigma_N^2. \quad (17)$$

Da die Formel (16) unabhängig von den in der Formel (15) vorkommenden Summenindex  $i$  ist, vereinfacht sich die Summe zu dem Faktor  $N$ . Nach diesen Vorbetrachtungen kann nun mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes der Fehler über

$$\sigma_{I_N} = \sqrt{\frac{V^2}{N} \sigma_N^2} = \frac{V}{\sqrt{N}} \sigma_N, \quad (18)$$

berechnet werden [6, 18]. Diese Proportionalität ist einer der Vorzüge von der Monte-Carlo-Integration, wobei weitere Vorzüge im Folgenden kurz näher erläutert werden sollen:



- Eine Monte-Carlo-Integration kann durch Hinzufügen eines einzelnen, zufälligen Wert verbessert werden. Bei anderen numerischen Schätzungen wie z. B. die numerische Quadratur ist die Verbesserung nur möglich, indem der Integrationsbereich unterteilt wird oder zu höheren Ordnungen übergeht. Beide notwendigen Operationen sind jedoch sehr rechenintensiv, da eine große Anzahl von neuer Funktionsauswertungen durchgeführt werden müssen.
- Außerdem sind in numerische Quadraturformeln höhere Ableitungen notwendig, um eine Fehlerabschätzung zu erhalten. In der Praxis sind diese, wenn überhaupt, nur sehr schwierig zu erhalten.
- Eine Monte-Carlo-Integration ist für beliebig geformte Integrationsbereiche durchführbar. Hierzu müssen die Zufallszahlen nur in einem Hyper-Quader liegen, welcher den Integrationsbereich umgibt.
- In Anbetracht des Rechenaufwands ist diese MC-Integration in höheren Dimensionen oft die einzig praktisch mögliche, da in numerische Quadraturformeln wie die Simpsonregel die Anzahl der Auswertungen exponentiell mit der Dimension wächst [11].

Diese soeben betrachtete Methode wird nun dazu verwendet, um die in Abschnitt 1.3 definierte Integralmatrix

$$I_{ij} \equiv \int d\varphi_3(\tau) \Psi_i(\tau) \Psi_j^*(\tau) \quad (19)$$

zu bestimmen. Wird diese durch die MC-Methode bestimmt, so ergibt sich

$$I_{ij} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \Psi_i(\tau_k) \Psi_j^*(\tau_k) \quad (20)$$

Da bei der Auswertung nur die Monte-Carlo-Daten zum Einsatz kommen, kann die in Formel (9) definierte Detektorakzeptanz vernachlässigt werden.

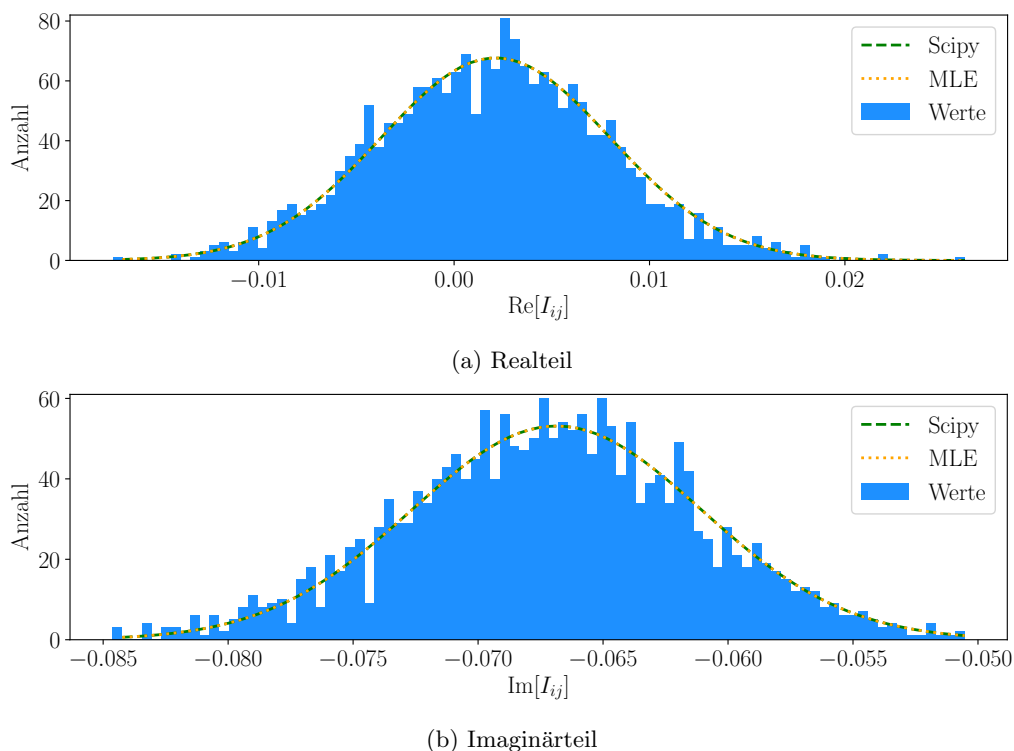
## 2.2 Bestimmung der statistischen Unsicherheit

In diesem Abschnitt soll die statistische Unsicherheit des Matrixelements  $I_{ij}$  bestimmt werden, wobei hierfür zwei unabhängige Verfahren verwendet werden. Die Grenzwertsatzmethode beruht auf den theoretischen Überlegungen, die in dem Abschnitt 2.1 hergeleitet wurden, und als zweites Verfahren kommt die Monte-Carlo-Methode zum Einsatz.

Für die Monte-Carlo-Methode ist es notwendig, dass die Daten für jede Welle mehrfach vorliegen, die jedoch alle eine unterschiedliche Schwankung um den wahren Wert besitzen. Hierfür werden insgesamt 2000 mal verschiedene Amplituden erzeugt, die jeweils 500 Ereignisse beinhalten. Mithilfe dieser Amplituden wird die Integralmatrix durch der Formel (20) bestimmt. In Abbildung 4 sind die daraus resultierende Werte für ein ausgewähltes Element von  $I_{ij}$  als Histogramm aufgetragen, wobei der Realteil in Abbildung 4a und der Imaginärteil in Abbildung 4b getrennt betrachtet werden. Wie bereits erwähnt besitzen diese eine Schwankung, die aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes einer Gaußverteilung folgen, und aus diesem Grund sind in der Abbildung 4 zusätzlich zwei Gaußfunktionen eingezeichnet. Die grüne Kurve wurde mithilfe der indem Pythonmodul `scipy` implementierten Optimierungsmethode bestimmt. Die Berechnung der orange Kurve wurde mithilfe der Maximum Likelihood Methode durchgeführt, welche in Abschnitt 1.3 beschrieben ist.

Wie in den Abbildungen 4a und 4b ersichtlich, liefern beide Methoden sehr ähnliche Ergebnisse, wobei für das gewählte Element von  $I_{ij}$  die Werte in Tabelle 1 exemplarisch dargestellt sind.

Abbildung 5 zeigt die relative Abweichung der Erwartungswerte zwischen den beiden Optimierungsmethoden für alle 87 Wellen im verwendeten PWA-Modell. Auf der Abszisse und Ordinate sind jeweils die Wellen aufgetragen, wobei als Achsenbeschriftung die Wellenindizes verwendet wurden. Die maximale relative Wert beträgt ungefähr  $10^{-4}$  im Realteil bzw.  $10^{-3}$  für den Imaginärteil, die Abweichung sind also für alle Werte sehr gering.


 Abbildung 4: Verteilung von den Werten des Integralmatrixelements  $I_{ij}$  für die Wellen  $0^{-+} 0^{+} f_0(1500) \pi S$  und die Welle  $0^{-+} 0^{+} f_0(980) \pi S$ .

	Methode	Erwartungswert [ $\cdot 10^{-4}$ ]	Amplitude	Standardabweichung [ $\cdot 10^{-4}$ ]
Re [ $I_{ij}$ ]	Scipy	21,23	67,67	58,54
	MLE	21,23	67,67	58,54
Im [ $I_{ij}$ ]	Scipy	-668,55	53,14	58,05
	MLE	-668,55	53,14	58,06

Tabelle 1: Parameterwerte für die Verteilung der Integralmatrixwerte.

Nachdem nun eine erste Möglichkeit zur Bestimmung der Integrationsunsicherheit dargestellt wurde, soll nun im Folgenden ein weiteres Verfahren beschrieben werden. Ein großer Nachteil in der Monte-Carlo-Methode liegt in der rechenintensiven Bestimmung von den verschiedenen Integralmatrizen, welche benötigt werden, um die Unsicherheit bestimmen zu können. Um dieses Problem zu lösen, soll nun wie in Abschnitt 2.1 dargestellt die Integralmatrix mit Formel (13) und die Unsicherheit mit Formel (18) bestimmt werden. In Abbildung 6 sind beide Verfahren gegeneinander dargestellt. Hierbei beschreiben Abszisse und Ordinate erneut den Wellenindex. Wird nun die Abbildung 6a und 6b betrachtet, so fällt zuerst die hohe Abweichung von bis zu 5% auf. Diese Abweichung lässt sich auf zweierlei Arten minimieren: i) Einerseits durch die Erhöhung der Anzahl der Integralmatrizen, die für die Monte-Carlo-Methode benötigt werden. Damit nähert sich die Verteilung eines einzelnen Integralmatrixelements weiter der Normalverteilung an und die Unsicherheit in der Interpolation wird minimiert. ii) Andererseits wird auch durch die Erhöhung der Ereignissanzahl die Unsicherheit der Monte-Carlo-Methode minimiert, da dadurch die Schwankungen minimiert und die Standardabweichung in der Abbildung 6 verkleinert wird. Ebenso wird der Grenzwertsatzmethode verbessert, da diese Unsicherheit proportional zu  $1/\sqrt{N}$  ist. Für diese Auswertung ist insbesondere der letzte Punkt beachtenswert, da nur 500 Ereignisse gewählt wurde.

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass die Unsicherheit einer Monte-Carlo-Integration mit  $1/\sqrt{N}$  abfällt, wobei  $N$  in diesem Fall die Anzahl der Ereignisse ist. In Abbildung 7 ist der Verlauf

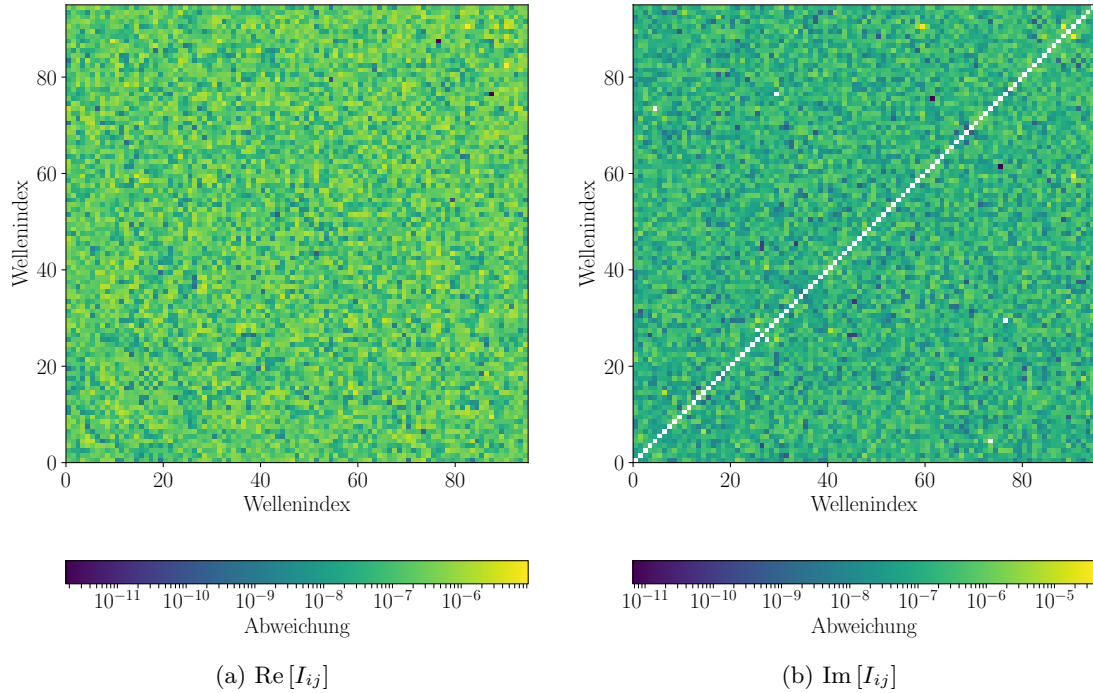


Abbildung 5: Absolute relative Abweichung der Standardabweichung von MLE- und Scipy-Optimierung. Für den Imaginärteil sind die Diagonalelemente nicht definiert, da diese nur ein Realteil besitzen. Dies lässt sich leicht plausibel machen, indem dieser Spezialfall explizit betrachtet wird:  $\Psi_i \Psi_i^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ .

grafisch in einer doppelt logarithmischer Darstellung aufgetragen. Dies hat den Vorteil, dass ein Potenzgesetz

$$y = a x^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad Y = \log(a) - \frac{1}{2} X \quad (21)$$

zu einer Geraden mit der Steigung  $1/2$  wird [16]. Durch diese Darstellungsart können insbesondere diejenigen Ordinaten übersichtlich dargestellt werden, für die die Bedingung  $0 < y < 1$  zutrifft. Die in Abbildung 7 blau dargestellten Punkte sind die Datenwerte, die orangefarbenen Ausgleichsgerade die theoretische  $1/\sqrt{N}$  Vorhersage. Als Vorhersage wurde das Potenzgesetz in Formel (21) mit  $a = 1$  verwendet. Anschließend wurde die zu betrachtende Welle normiert, wobei als Referenzpunkt der theoretische Wert bei 50 000 Ereignisse herangezogen wurde. Bei der Auswertung der normierten Welle und der Theoriekurve stimmen bis auf den ersten Punkt mit 500 Ereignisse alle Werte gut überein.

Um dieses Verhalten für alle untersuchten Wellen darzustellen, wird auf Abbildung 8 verwiesen. Zunächst werden alle Wellen nach dem gleichen Verfahren auf die Theoriekurve normiert. Nach der Normierung werden die Residuen zwischen den normierten Unsicherheiten und der in Abbildung 7 aufgetragenen theoretischen Vorhersage bestimmt. Zur besseren Interpretationsmöglichkeit werden diese Residuen anschließend durch die dazugehörigen Unsicherheiten dividiert, damit ein relatives Verhältnis entsteht. Um die Güte der einzelnen Daten zu beurteilen, wird nun der jeweils maximale Wert aufgetragen. Insgesamt ergibt sich bei der Auswertung ein maximales Verhältnis von ungefähr 0,1, wobei dieses Verhältnis für eine steigende Anzahl der Ereignisse weiter minimiert wird. Dadurch, und da die Anzahl der Ereignisse über 5 Größenordnungen hinweg betrachtet wird, kann die theoretische Vorhersage für alle betrachteten Wellen als gültig angenommen werden.

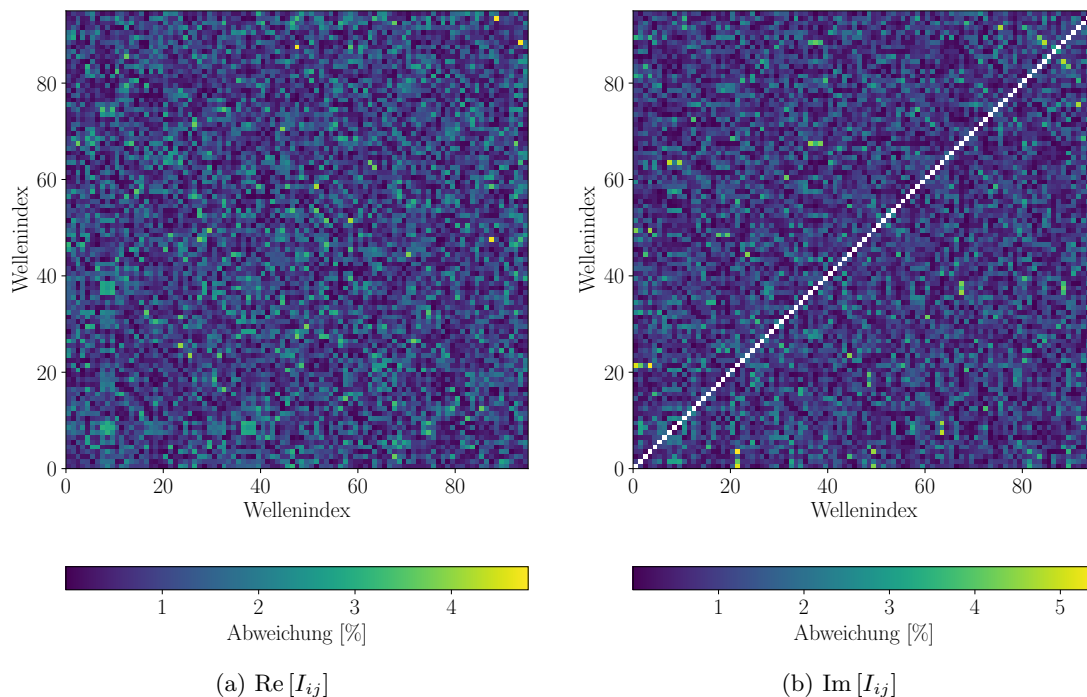


Abbildung 6: Relative Abweichung der berechneten Unsicherheit aus der Monte-Carlo-Methode und der Grenzwertsatzmethode. Zur Übersichtlichkeit sind die Absolutwerte aufgetragen.

### 3 Bestimmung der Intensitätsunsicherheit

#### 3.1 Masse $m_{3\pi} = 1800$ MeV

Mithilfe der Maximum Likelihood Estimation, welche im Abschnitt 1.3 erläutert wurde, werden aus der gemessenen Intensitätsverteilung und den Integralwerten die Partialwellenamplituden der Teilchen bestimmt. Da dieses Verfahren nur eine Schätzmethode beschreibt, sind sowohl die Daten als auch die Integralwerte von statistischen Fluktuationen betroffen. Das in Abschnitt 1.3 beschriebene Vorgehen zur Bestimmung der Unsicherheit berücksichtigt jedoch nur die Unsicherheit, die durch die Streuung der gemessenen Intensitätsverteilung hervorgerufen wird. Bei dieser Betrachtung bleibt jedoch ungeachtet, dass die Parameter, die in der Formel 11 zur Definition des Modells auftauchen, ebenfalls eine Unsicherheit besitzt. Erschwerend kommt hinzu, dass die Anwendung der Maximum-Likelihood-Estimation zur Bestimmung des Minimums eine komplizierte numerische Prozedur darstellt. Die Propagation der Parameterunsicherheiten kann aus diesem Grund analytisch nicht durchgeführt werden. Zur Lösung dieses Problems sollen die Auswirkungen der Unsicherheiten numerisch mithilfe der Monte-Carlo-Methode ermittelt werden.

Bevor das weitere Vorgehen erläutert wird, soll kurz darauf eingegangen werden, auf welche Weise die Monte-Carlo-Methode zum Einsatz kommt. Wie in Abschnitt 2 dargestellt, werden die Integralmatrixelemente mithilfe der Monte-Carlo-Methode bestimmt. Für diese Berechnung muss nur der Phasenraum generiert werden, die genaue Verteilung der Daten ist hierbei zunächst unerheblich. Im Gegensatz dazu wird die Monte-Carlo-Methode auch zur Erzeugung von Pseudodaten herangezogen, die in der Maximum-Likelihood-Estimation zur Anwendung kommen. Hierfür werden Zufallszahlen gewählt, die eine ähnliche Verteilung wie die zu beobachtbaren Daten besitzen. Insgesamt werden für die MLE-Monte-Carlo-Integration 21 943 Ereignisse verwendet.

Es werden 101 voneinander unabhängige Integralmatrizen erzeugt, die aus 101 unabhängigen Phasenraumdatensätzen gewonnen werden, und dadurch besitzen die Integralmatrizelemente jeweils einen unterschiedlichen Wert. Für jeden Durchlauf wird die Anzahl der Ereignisse konstant gehalten, jedoch finden mehrere Wiederholungen mit einer veränderten Anzahl von Ereignissen statt. Für jede einzelne Matrix wird nun die Maximum Likelihood Methode angewendet, wobei diese immer

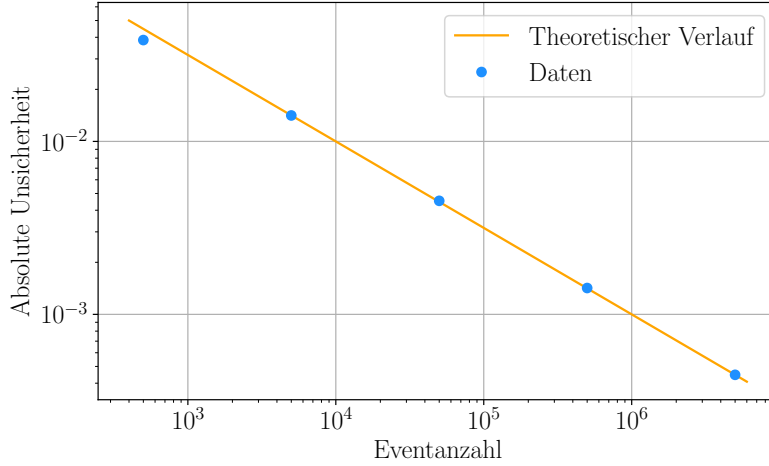


Abbildung 7: Normierter Verlauf der Monte-Carlo-Unsicherheit für die in Abbildung 4 beschriebene Wellenkombination in Abhängigkeit von den Anzahl der Ereignisse.

denselben Datensatz verwendet. Durch die MLE werden die Partialwellenamplituden bestimmt. Im Folgenden sollen jedoch nicht die Amplituden, sondern die Intensität der Welle betrachtet werden.

In Abbildung 9 ist auf der Abszisse der Index der Integralmatrizen und auf der Ordinate die Intensität aufgetragen. Das Intervall für die Ordinate beginnt jeweils bei 0, damit alle Abbildungen gut miteinander verglichen werden können und nicht durch eine Skalierung der Achsenabschnitte behindert werden. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass sich für jede Integralmatrix ein unterschiedlicher Intensitätswert ergibt. Interessant ist nun, wie stark die Fluktuation in Abhängigkeit der für die Intervallberechnung verwendeten Ereignisanzahl ausfällt. In Abbildung 9a ist eine Anzahl von 500 Ereignissen, in Abbildung 9b eine Anzahl von 50 000 Ereignissen aufgetragen.

Die Fluktuationen der Intensität soll nun mit der MLE-Schätzwertmethode für die Unsicherheiten verglichen werden. Auf die Berechnung dieser Unsicherheit wurde im Abschnitt 1.3 kurz eingegangen. In Abbildung 10 sind die MLE-Unsicherheiten für die in Abbildung 9 dargestellte Intensitätswerte aufgetragen, wobei erneut auf der Abszisse die unterschiedlichen Integralmatrizen und auf der Ordinate in diesem Fall die MLE-Unsicherheiten aufgetragen sind.

In beiden Abbildungen 9 und 10 sind die MLE-Unsicherheiten sowie die Fluktuationen von den Intensitätswerten in den Abbildungen (a), also bei einer Anzahl von 500 Ereignissen, um ungefähr eine Größenordnung größer als in Abbildungen (b).

Im weiteren Verlauf soll die Fluktuation mit der Unsicherheit verglichen werden. Hierzu wird das Verhältnis

$$R_i = \frac{\sigma(\mathcal{I}_i)}{\bar{\mathcal{F}}_i} \quad (22)$$

definiert. Hier repräsentiert  $\sigma(\mathcal{I}_i)$  die Standardabweichung der MLE-Intensitäten für eine bestimmte Welle  $i$ , die mit den unabhängigen Integralmatrizen bestimmt wurden. Die Variable  $\bar{\mathcal{F}}_i$  repräsentiert den Mittelwert der MLE-Intensitätsunsicherheit für diese Welle  $i$ . Grafisch kann diese Formel auch über die bereits beschriebenen Abbildungen definiert werden:  $\sigma(\mathcal{I}_i)$  beschreibt die Standardabweichung der in Abbildung 9 dargestellten Werte, wohingegen  $\bar{\mathcal{F}}_i$  der Mittelwert der in Abbildung 10 dargestellten Werten ist.

Das in der Formel (22) definierte Verhältnis besitzt gegenüber den bisherigen Darstellungen zwei Vorteile: i) Die durch die Integralmatrizen hervorgerufenen Fluktuationen und die Unsicherheiten, welche durch die Maximum Likelihood Estimation berechnet werden, sind durch eine einfache Zahl miteinander verknüpft, und ii) können nun alle, und nicht wie bisher nur eine ausgesuchte Welle, direkt ausgewertet werden.

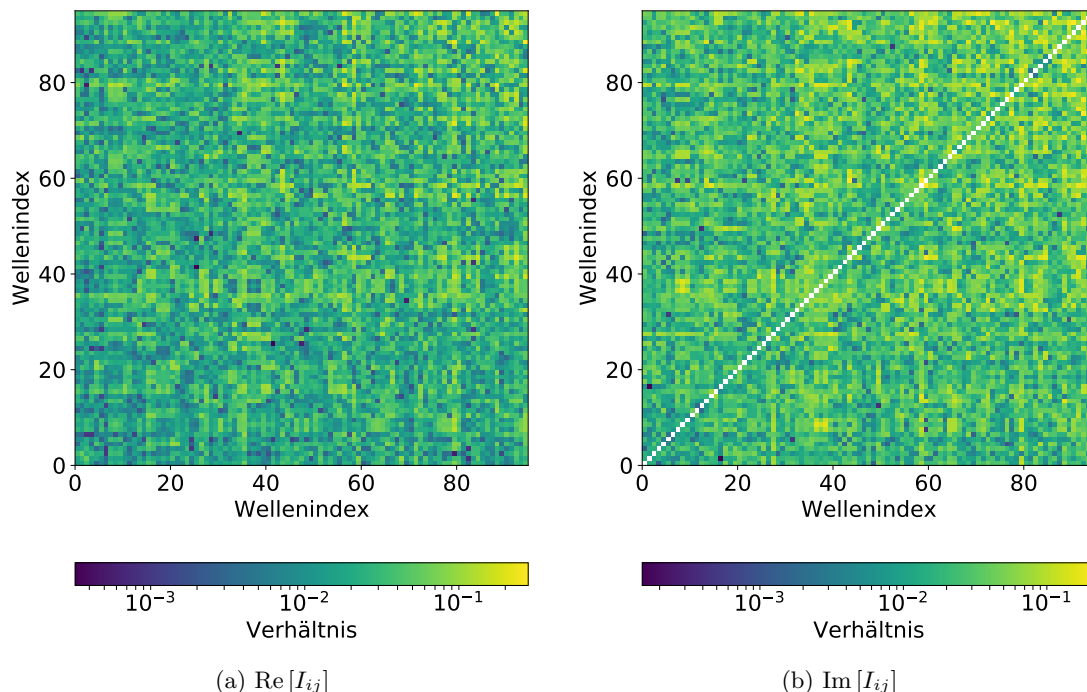


Abbildung 8: Darstellung des maximalen, normierten Residuums pro Welle.

In Abbildung 11 sind die in Formel (22) beschriebenen Verhältnisse für die Anzahl von 500 (Abb.: 11a) und 50 000 (Abb.: 11b) Ereignisse aufgetragen. Für die Anzahl von 500 Ereignisse befindet sich die meisten  $R_i$ -Werte in einem Bereich von 7,5 bis 20, also ist die Standardabweichung von  $\mathcal{I}_i$  aufgrund der Fluktuationen der Integralmatrixwerte deutlich größer als der Mittelwert die MLE-Unsicherheit. Dahingehend ist für die 100-fach größere Anzahl das Verhältnis in einem Bereich von 0,55 bis 1. Dies bedeutet, bereits eine Anzahl von 50 000 Ereignisse ausreichend ist, damit die Unsicherheit aufgrund der Integralfluktuationen kleiner als die MLE-Unsicherheit wird. Hierbei wurde für die MLE-Berechnung 21 943 Ereignisse verwendet. Werden für die Phasenraumdaten insgesamt 25 000 Ereignisse gewählt, ergibt sich das Verhältnis zu  $\overline{R}_i = 1,07$ . Also sind bei einer ähnlichen Ereignissanzahl zwischen Integral- und MLE-Berechnung die betrachteten Werte in etwa gleich. In Abbildung 12 ist diese Abhängigkeit, die in der Abbildung 11 bereits ersichtlich ist, erneut für alle Wellen aufgetragen, wobei die Anzahl der betrachteten Ereignisse von 2 auf 4 erhöht wurde. Diese Abbildung bestätigt die Erwartung, dass mit einer steigenden Anzahl von Ereignissen für alle untersuchten Wellen das Verhältnis zu sinken beginnt. Eine weitere Erkenntnis daraus ist, dass die benötigte Anzahl, ab welcher die Bedingung  $R_i < 1$  gilt, für jede Welle unterschiedlich ist. Auffallend sind außerdem die letzten 8 Wellen, denn für diese Wellen ist das Verhältnis kleiner als für die anderen Wellen. Die ersten sieben Wellen besitzen alle eine negative Reflektivität, wobei dies bedeutet, dass die Wellen andere Produktionsprozesse besitzen als die anderen 80 Wellen. Zu beachten ist, dass die Eigenschaften dieser 7 Wellen bisher nicht gut verstanden sind. Zum Beispiel ist noch nicht klar, wie die Wellen entstehen, auch wenn die Vermutung existiert, dass sie durch den Untergrund hervorgerufen werden. Aus diesem Grund sind sie auch mit der *flat-Wave*, auf die im Folgenden kurz eingegangen werden soll, eher vergleichbar als mit den anderen Wellen, die bekannte Resonanzen besitzen.

In der Regel sind die gemessenen Daten mit einem Hintergrundrauschen versehen, welche durch fehlerhaft rekonstruierte Ereignisse entstehen. Weiterhin sind auch solche Ereignisse, die dem Signalprozess ähnlich sind und durch die Kriterien, welche die Ereignisse selektieren, als nicht fehlerhaft klassifiziert werden, mögliche Fehlerquellen. Um diese Fälle zu berücksichtigen, wird eine inkohärente Welle hinzugefügt, die sogenannte *flat-Wave*. Die entsprechende Zerfallsamplitude  $\Psi_{\text{flat}}$  ist konstant, und o. B. d. A kann  $\Psi_{\text{flat}} = 1$  gesetzt werden. Die Eigenschaften diese Welle sollen hier nicht näher betrachten werden.

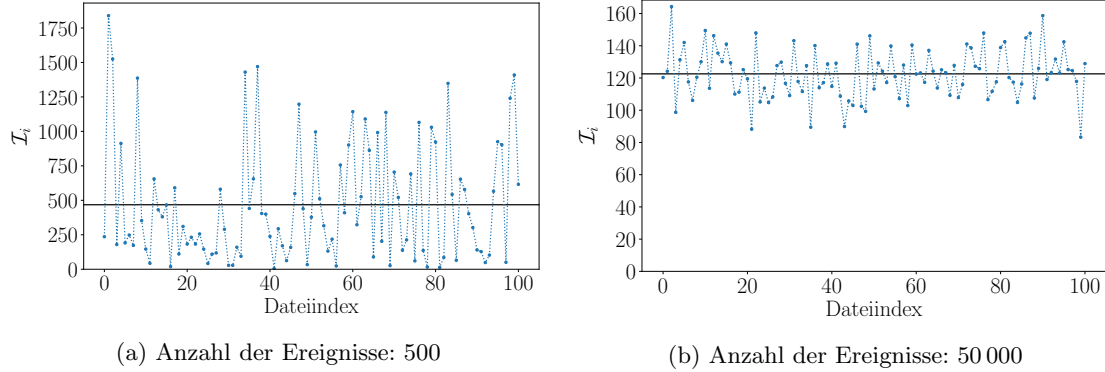


Abbildung 9: MLE für die Intensität der  $0^{-+} 0^{+} f_0(1500) \pi$  S Welle mit Integralmatrizen, die mit unterschiedlichen zufälligen Phasenraumdatensätzen generiert werden.

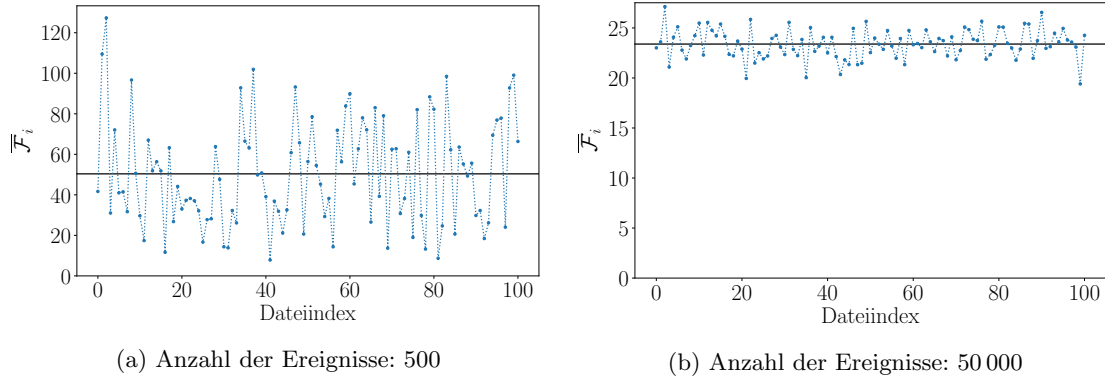
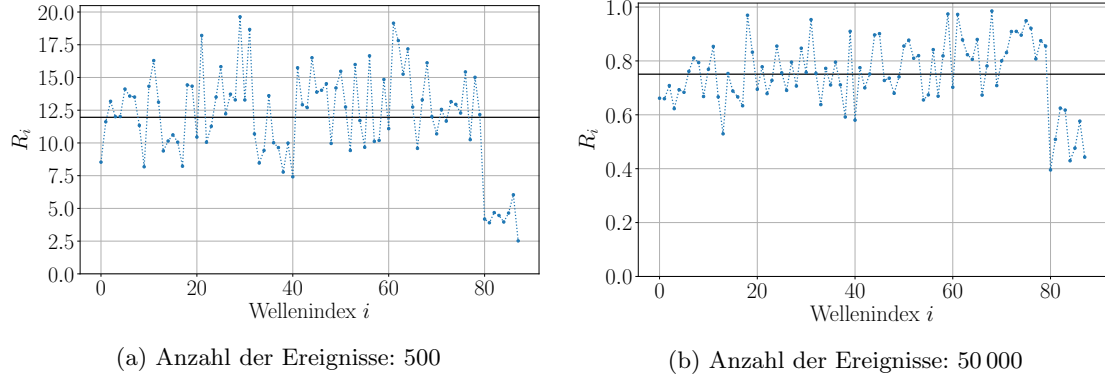
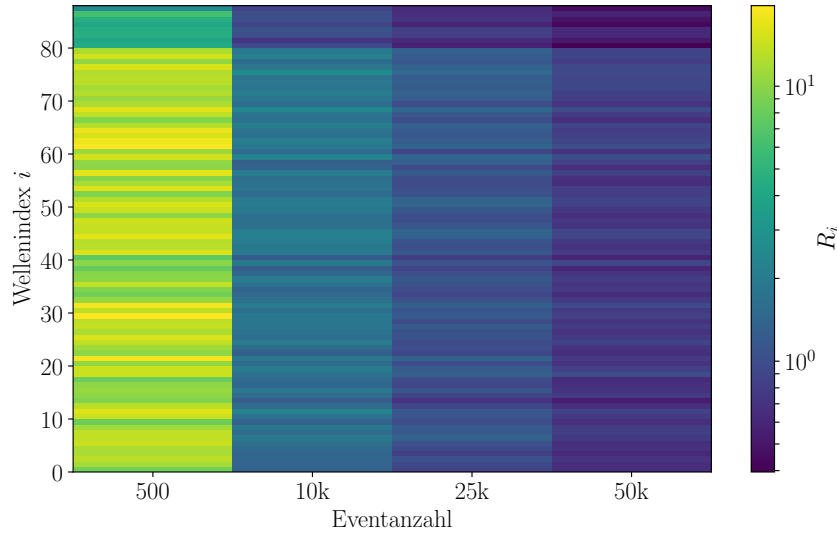


Abbildung 10: MLE für die Intensitätsunsicherheit der  $0^{-+} 0^{+} f_0(1500) \pi$  S Welle mit unterschiedlichen Integralmatrizen.

Der in Abbildung 12 dargestellte Verlauf als Funktion der Anzahl der Ereignisse, lässt sich näherungsweise durch

$$R_i(N) = A_i + \frac{B_i}{N^{r_i}} \quad (23)$$

beschreiben. Bei der Bestimmung der Parameter  $A$ ,  $B$ , und  $r$  muss beachtet werden, dass für jede Welle nur 4  $N$ -Werte vorhanden sind, und darum ist anzunehmen, dass die Schwankung der geschätzten Parameter groß ist. In der Abbildung 13 ist der Exponenten  $r$  mit einem Mittelwert von 1,19 für jede untersuchte Welle aufgetragen. Es ist zunächst unerwartet, dass der Exponent einen so großen Wert besitzt, ist doch die erste Erwartung, dass  $r \approx 1/2$  gilt. Die Abweichung kann durch die Vermutung erklärt werden, dass zwei Effekte auf die Unsicherheit einwirken. Einerseits die erwartete Fehlerfortpflanzung, andererseits auch die Verzerrung der Daten bei kleinen Ereigniszahlen. Die Verzerrung kann in Abbildung 9 leicht dargestellt werden. Der Mittelwert für die Abbildung 9a beträgt 430, und für die Abbildung 9b 123. Bei beiden Abbildung sollten die Mittelwerte jedoch übereinstimmen, da die Anzahl der Ereignisse die Intensitätswerte nicht beeinflussen sollte, sondern nur die Unsicherheit. Da jedoch eine Abweichung vorliegt, muss diese erste Überlegung dahingehen erweitert werden, dass bei einer niedrigen Anzahl von Ereignissen die Ergebnisse verzerrt sind, und aus diesem Grund muss immer eine Mindestanzahl von Ereignissen überschritten werden, damit diese Verzerrung verschwindet.

Abbildung 11: Verhältnis  $R_i$  aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells.Abbildung 12: Abhängigkeit des Verhältnisses  $R_i$  aus der Formel (22) von der Anzahl in der MC-Integration benutzten Ereignisse.

### 3.2 Masse $m_{3\pi} = 1000$ MeV

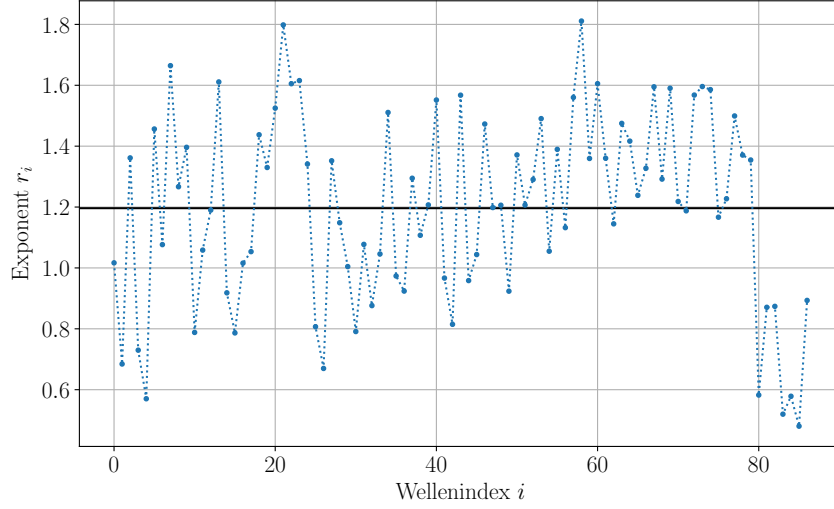
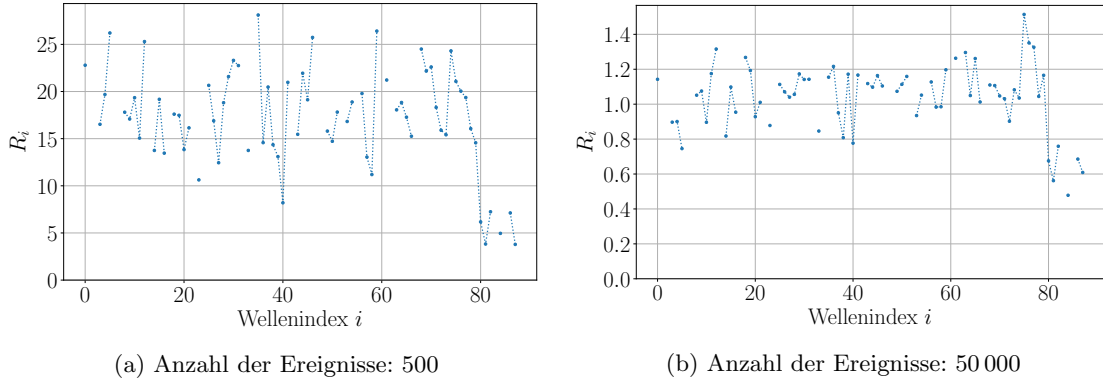
Dasselbe Verfahren soll nun für eine geringere Masse durchgeführt werden, wobei  $m_{3\pi} = 1000$  MeV ausgewählt wird. Wie in Abbildung 11 ist in Abbildung 14 das Verhältnis  $R_i$  zwischen der Standardabweichung der Partialwellenintensität und dem Mittelwert der MLE-Unsicherheit (siehe Formel (22)) aufgetragen.

Bei der Auswertung der Abbildung muss zunächst darauf geachtet werden, dass nicht für jeder Wellenindex ein Wert vorliegt. Die dazugehörigen Wellen können bei der vorgegebenen Masse von  $m_{3\pi} = 1000$  MeV nicht erzeugt werden und somit ist ihre Auswertung nicht möglich. Insgesamt ergeben sich bei dieser Masse 68 Wellen. Beim Vergleich beider Abbildungen ist eine direkte Auffälligkeit, dass das Verhältnis bei einer geringeren Produktionsenergie tendenziell größer ist als bei einer höheren Energie. Insbesondere bei einer Anzahl von 50 000 Ereignisse ist das Verhältnis in Abbildung 11b stets kleiner als 1, wohingegen in Abbildung 14b die meisten Werte und den Wert 1 fluktuierten.

In Abbildung 15 ist das Verhältnis von

$$R_{i,g} = \frac{R_{i,1800 \text{ MeV}}}{R_{i,1000 \text{ MeV}}} \quad (24)$$



Abbildung 13: Exponent  $r_i$  in Formel (23) für alle 88 Wellen des PWA-Modells.

(a) Anzahl der Ereignisse: 500

(b) Anzahl der Ereignisse: 50 000

Abbildung 14: Verhältnis  $R_i$  aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells für  $m_{3\pi} = 1000$ .

aufgetragen, wobei  $R_{i,x}$  mit  $x \in \{1800 \text{ MeV}, 1000 \text{ MeV}\}$  jeweils durch Formel 22 gegeben ist. Hierbei sind erneut für diejenigen Wellen, die mit dieser 3-Pionenmasse nicht erzeugt werden können, keine Datenpunkte vorhanden. In Tabelle 2 sind die Mittelwerte für die Doppelverhältnisse aufgetragen.

Anzahl der Ereignisse	Mittelwert $\bar{R}_{i,g}$
500	0,73
10 000	0,71
25 000	0,75
50 000	0,74

Tabelle 2: Mittelwert für die in Abbildung 15 dargestellten Verhältnisse.

Es ist ersichtlich, dass der Mittelwert nahezu unabhängig von der Anzahl der Ereignisse ist. Die Vermutung auf ein allgemeines Verhalten liegt nahe, wobei dies in weiteren Untersuchungen überprüft werden müssen. Bestätigt sich diese Vermutung, so bedeutet dies, dass bei niedrigen 3-Pionenmasse mehr Ereignisse für die MC-Integration notwendig sind als bei hohen Massen.

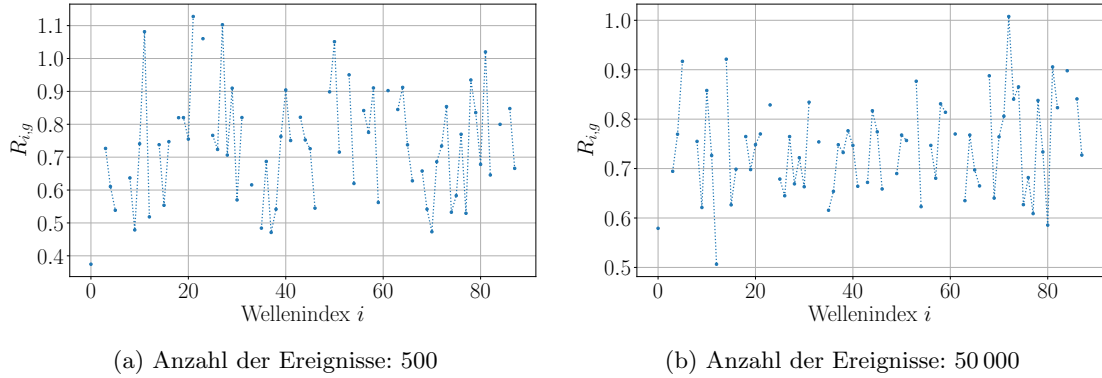


Abbildung 15: Doppelverhältnis aus Formel (24) für alle 88 Wellen des PWA-Modells.

### 3.3 Jackknife Methode

#### 3.3.1 Theorie der Jackknife-Methode

Als Ausgangslage sei eine Stichprobe  $x_1, \dots, x_N$  mit den unabhängigen Werten  $x_i$  gegeben. Ist man nun an den Eigenschaften dieser Stichprobe interessiert, so ergeben sich als einfache Kenngrößen der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i^N x_i \quad (25)$$

sowie die Standardabweichung

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \quad (26)$$

Die Formeln (25) und (26) beziehen sich auf die einzelnen Messwerte  $x_i$  und geben an, wie weit ein typischer einzelner Messwert vom Mittelwert  $\bar{x}$  abweicht. Für die meisten Anwendungen ist es jedoch interessanter, welche Schwankungen die Mittelwerte  $\bar{x}$  besitzen. Dies bedeutet, dass die Standardabweichung vom Mittelwert  $\bar{x}$  durch

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (27)$$

berechnet werden muss.

In dieser Resampling-Methode muss die Messreihe  $x_1, \dots, x_N$  nicht für jeden Mittelwert neu erzeugt werden, sondern vielmehr werden von der einmalig erzeugten Reihe  $d$  Elemente entfernt und von den restlichen Werten die Standardabweichung berechnet. Dadurch können insgesamt

$$\binom{N}{d} \quad (28)$$

Stichproben mit  $N - d$  Werten  $x_d$  erzeugt werden [12]. Hierbei muss die Formel (25) entsprechend

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N-d} \sum_{i \neq \{d\}} x_i \quad (29)$$

modifiziert werden, und der Mittelwert über alle Jackknifedurchläufe ergibt sich zu [9, 22]

$$\bar{x} = \frac{1}{\binom{N}{d}} \sum_{i \neq \{d\}}^N \bar{x}_i. \quad (30)$$

### 3.3.2 Bestimmung der Unsicherheit

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 wurde ein Verfahren benutzt, bei dem für die Erzeugung der statistisch unabhängigen Integraldaten  $N$ -mal neue Amplitudensets berechnet werden mussten. In diesem Abschnitt soll erprobt werden, ob die Jackknife-Methode ein effizienteres Verfahren zur Bestimmung der Unsicherheit darstellt.

Für die Abbildung 16 werden zunächst die Integralmatrizen mit 50 000 Ereignissen für einer Masse von 1800 MeV berechnet. Anschließend werden von diesen 50 000 Ereignissen einmal 500 und einmal 40 000 Ereignisse zufällig ausgewählt und davon die Integralmatrizen erstellt. Dieser Vorgehen wird nun 100 mal wiederholt, damit eine ausreichend große Zahl für die Bestimmung der Standardabweichung zur Verfügung steht. Die Abbildung 16 wurde äquivalent wie die Abbildung 11 erzeugt.

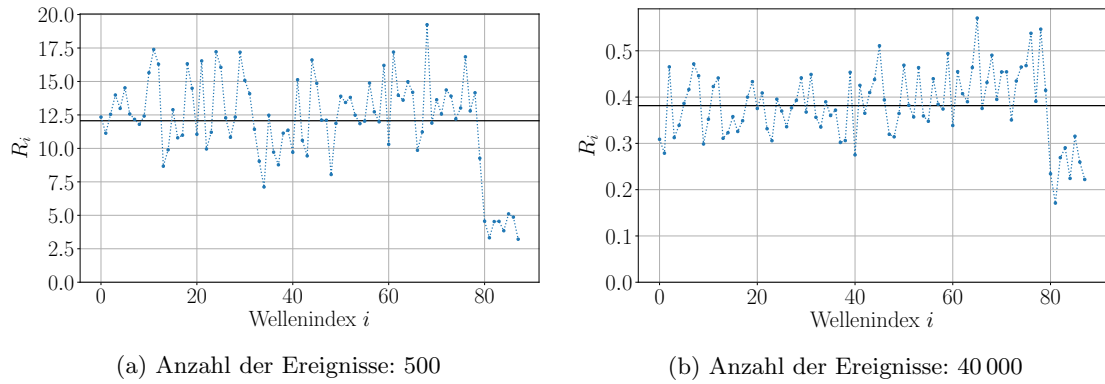


Abbildung 16: Verhältnis  $R_i$  aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells, berechnet durch die Jackknife-Methode.

Durch die gleiche Anzahl von Integralmatrizen und die ähnliche Anzahl von Ereignissen können die Werte der Jackknife-Methode und die aus der in Abschnitt 3 dargestellten Methoden miteinander verglichen werden. In Abbildung 17 sind die Werte aus Abbildung 11 und 16 in Relation gesetzt. Hierfür wurde die Formel

$$R_{i,J} = \frac{R_{i,1800 \text{ MeV}}}{R_{i,\text{Jackknife}}} \quad (31)$$

verwendet.

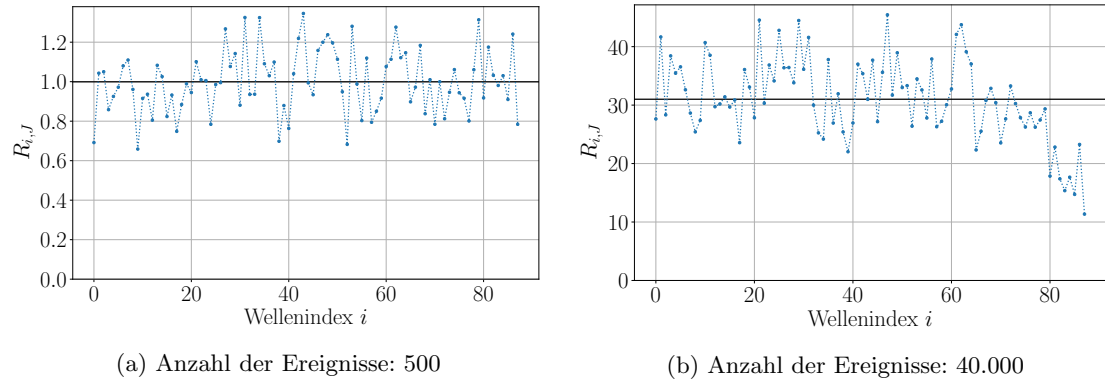


Abbildung 17: Doppelverhältnis aus Formel (31) für alle betrachteten Wellen.

In Abbildung 17a ist das Verhältnis für 500 Ereignisse dargestellt. Der Mittelwert liegt ungefähr bei 1,0, d. h. dass für 500 Ereignisse beide Methoden übereinstimmen. Im Gegensatz dazu beträgt in der Abbildung 17b der Mittelwert in Abbildung 17b, die das Doppelverhältnis für 40 000 Ereignisse zeigt, ungefähr einen Mittelwert von 2,0, und für 25 000 Ereignisse wird ein Mittelwert von 1,4

berechnet. Dies bedeutet, dass für eine größere Anzahl  $N$  von Ereignissen beide Methoden verschiedene Ergebnisse liefern. Jedoch kann angemerkt werden, dass, obwohl verschiedene Verhältnisse berechnet werden, beide Methoden eingesetzt werden können, denn beide Methoden verbinden die Unsicherheit der Integralmatrix mit der MLE-Unsicherheit. Der Vorteil in der Jackknife-Methode liegt darin, dass diese einerseits weniger Daten benötigt, andererseits aber zusätzliche Informationen wie die Verzerrung der Schätzfunktion berechnen kann, die in dieser Ausarbeitung nicht weiter betrachtet werden soll.

### 3.4 Verschiedene MLE-Datensätze

In dem Abschnitt 3 wurde betrachtet, welchen Einfluss eine fluktuierende Integralmatrix auf die Intensität besitzt. Dabei wurde, wie in Abschnitt 3.1 näher erläutert, für die Maximum-Likelihood-Estimation immer derselbe Monte-Carlo-Datensatz verwendet, sodass bei gleichen Integralwerten auch immer dieselben Intensitäten berechnet werden. Dagegen soll nun im Folgenden kurz untersucht werden, wie sich ein veränderten Datensatz auf die Unsicherheit auswirkt. Dies bedeutet, dass auch bei gleichen Integralwerten die Intensitäten fluktuieren.

In Abbildung 18 ist die Standardabweichung  $\sigma(\mathcal{I}_i)$  aus der Formel (22) aufgetragen, wobei die Masse  $m = 1800$  MeV und eine Anzahl von 50 000 Ereignissen gewählt wurde. Für beide Linien wurden dieselbe Integralmatrix verwendet, und die roten Werte repräsentieren die Werte, die wie in Abschnitt 3.1 erzeugt wurden. Dahingehend wird bei der blauen Linie für jede einzelne Intensitätsberechnung ein neuer Monte-Carlo-Datensatz für die MLE-Berechnung verwendet.

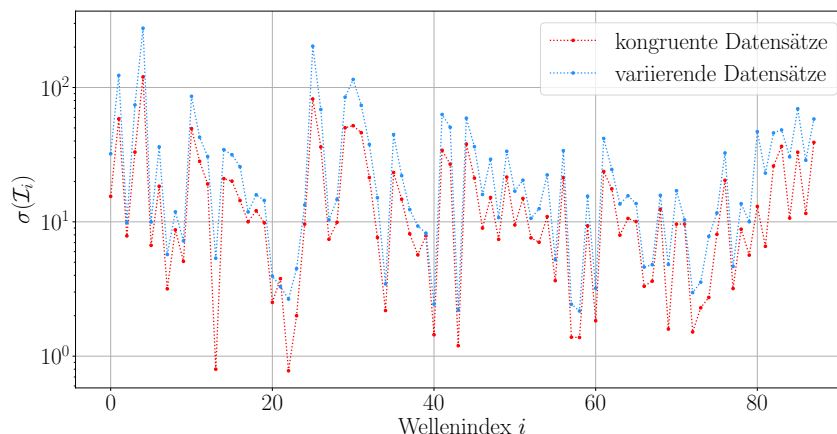


Abbildung 18: Verlauf der in Formel (22) vorkommenden Standardabweichung  $\sigma(\mathcal{I}_i)$ , jeweils für kongruente und variierende Startparameter.

Auffällig ist zunächst, dass in der logarithmischen Darstellung die meisten Werte nur voneinander verschoben sind. Wird das Verhältnis zwischen den beiden Messreihen mit

$$R_{i,s} = \frac{R_{i,\text{kongruent}}}{R_{i,\text{variierend}}} \quad (32)$$

gebildet, so ergibt sich das in Abbildung 19 dargestellte Verhalten. Das Verhältnis der Standardabweichungen besitzt einen Mittelwert von  $\bar{R}_{i,s} = 0,60$ . Dieser Faktor repräsentiert die konstante Verschiebung, die in der logarithmischen Darstellung in Abbildung 18 erkennbar ist. Darüber hinaus ist die Standardabweichung  $\sigma(R_{i,s}) = 0,15$  beziehungsweise 25 % vom Mittelwert. Hierbei wird ersichtlich, dass die meisten Werte innerhalb der Standardabweichung schwanken und nur wenige Ausreißer vorhanden sind. Nach der Abbildung 18 ist dieses Verhalten jedoch nicht verwunderlich, bereits dort ist ersichtlich, dass die Verschiebung der Werte nur für einige wenige Ausnahmefälle nicht zutreffend ist.

In Abbildung 20 ist äquivalent wie in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 das Verhältnis  $R_i$  aus Formel (22) angewandt worden, um den Einfluss der Integralschwankung auf die MLE-Unsicherheit bestimmen

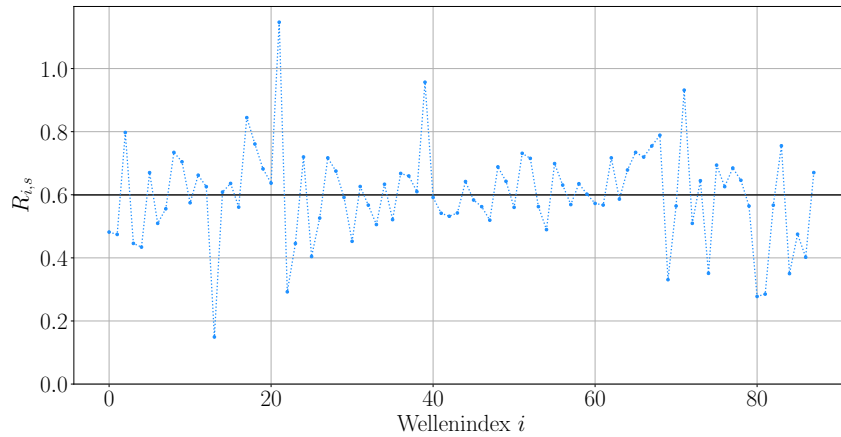


Abbildung 19: Verhältnis der in Abbildung 18 dargestellten Werte laut Formel (32).

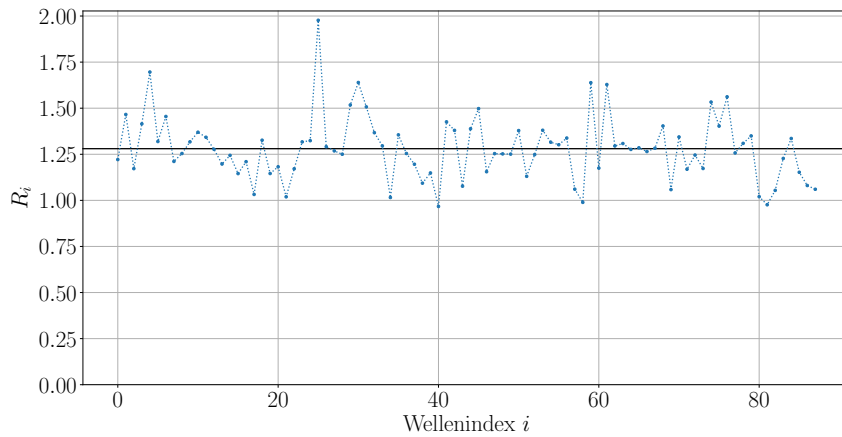


Abbildung 20: Darstellung von dem in Formel (22) beschriebenem Verhältnis für unterschiedliche Startparameter.

zu können. Diese Abbildung kann direkt mit Abbildung 11b verglichen werden, da bis auf die oben beschriebene Änderung beide Abbildungen äquivalent erzeugt wurden.

## 4 Massenabhängigkeit der Integralmatrix

### 4.1 Binning

Wurden bisher die Integralmatrizen für die festen Massen von  $m_{3\pi} = 1000$  MeV und  $m_{3\pi} = 1800$  MeV als Funktion der Anzahl der Ereignisse betrachtet, so wird nun diese konstant bei 50 000 belassen und  $m_{3\pi}$  über den Bereich  $m_{3\pi} \in [600, 2000]$  MeV variiert.

In der Abbildung 21 ist der Massenverlauf einer ausgewählten Integralmatrixelements dargestellt. Im oberen Graphen ist der Verlauf des Integralwertes in Abhängigkeit der  $m_{3\pi}$  dargestellt. Hierbei ist eine starke Abhängigkeit von der Masse zu beobachten. Dies lässt sich dadurch erklären, dass zur Erzeugung der Teilchen  $f_0(980)$  und  $\pi$  eine Mindestenergie von ca 1,1 GeV vonnöten ist, ab welcher das Teilchenpaar erst erzeugt werden kann. Wird diese Energie überschritten, so steigt auch der Absolutwert der Integralmatrix bis zu einem Maximum an und fällt ab diesem ab. Des Weiteren sind in der Abbildung 21 drei Datenreihen mit den Beschriftungen 1 MeV, 10 MeV und 20 MeV dargestellt. Diese drei Werte geben die Breiten der  $m_{3\pi}$ -Bins, d. h. die  $m_{3\pi}$  Auflösung an,

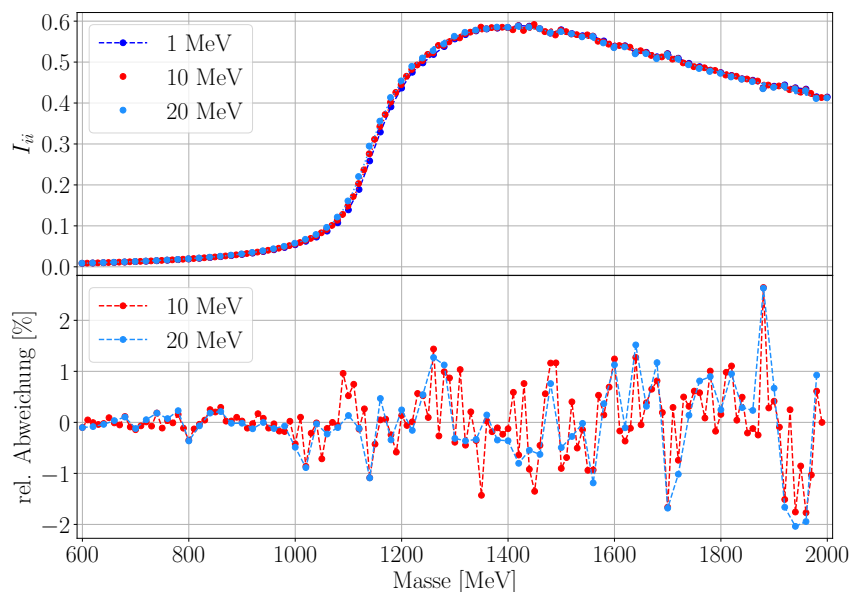


Abbildung 21: Verlauf der Integralmatrix in Abhängigkeit der Masse.

in denen die Integrale berechnet wurden. Wie im Abschnitt 2.1 bereits erläutert, ist die Berechnung der Integralmatrix für alle Wellen ein rechen-, und somit auch eine zeitintensive Vorstufe zur Bestimmung der Übergangsamplitude  $\mathcal{T}_i$ . Die Integration erfolgt bisher bei gewählten  $m_X$  und  $t$ , d. h. dass keine einfache Änderung der Binnings möglich ist ohne die Integrale neu zu berechnen. Um diesen Problem zu lösen, soll nun eine alternative Möglichkeit zur Ermittlung der Integralwerte aufgezeigt werden. Hierbei werden zunächst die Integralmatrizen mit einer Auflösung von  $\Delta m_{3\pi} = 1$  MeV ermittelt. Dieser Punkt bedeutet einen große Aufwand, da, wie bereits in Abschnitt 3.1 gezeigt, eine genügend große Anzahl von Ereignissen für die MC-Integration verwendet werden muss. Der Vorteil liegt jedoch darin, dass diese Berechnung nur einmalig durchgeführt werden muss, denn man kann durch Summation der Integralmatrizen die Werte für ein breiteres Massenintervall durch die Formel

$$I_{ij}^{B,m} = \frac{E_1}{E} \cdot \sum_{k=1}^n I_{ij}^{B=1,m+k} \quad (33)$$

bestimmt werden. Hier beschreibt  $I_{ij}^{B,m}$  den Integralwert an der Matrixposition  $ij$  für die in der PWA verwendete Masse  $m$  mit der Massenbreite  $B$ ,  $E_1$  die Anzahl der Ereignisse für die Massenbreite von 1 MeV,  $E$  die Anzahl der Ereignisse für die zu berechnende Massenbreite und  $I_{ij}^{B=1,m+k}$  die vorgerechnete Integralmatrixwert für die Masse  $m+k$  an der Position  $ij$ . Der Faktor  $E_1/E$  ist notwendig, da jeder Massenbereich 50 000 Ereignisse besitzt. Das heißt, dass durch das Binning die Integralmatrizen mehr Ereignisse besitzen als die Referenzmatrizen, und diese Ungleichheit wird durch den Faktor bereinigt. Dies bedeutet aber auch, dass die Matrizen, die durch das Binning erzeugt werden, geringere Fluktuationen besitzen, da insgesamt in den Ausgangsdaten mehr Ereignisse zur Verfügung stehen. In den unteren Graphen sind die relativen Abweichungen zwischen den summierten und den auf herkömmliche Weise berechneten Werte dargestellt. Bei diesem Beispiel beträgt die relative Abweichung maximal 2,5%, wobei diese - wie bereits erwähnt - durch eine Erhöhung der Anzahl von Ereignissen minimiert werden können.

In Abbildung 22 wurde dieses Verfahren angewandt, um die Werte für die Diagonalelemente bei einer Masse von  $m = 1800$  MeV zu bestimmen. Hierbei sind erneut in dem oberen Abschnitt die Werte und im unteren Abschnitt die relativen Residuen in Prozent aufgetragen. In Abbildung 23 sind dieselben Residuen nochmals aufgetragen, mit dem einzigen Unterschied, dass eine Anzahl von  $10^6$  Ereignissen verwendet wurde. Aufgrund der Rechenzeit wird hierbei nur eine Massenbreite von 20 MeV betrachtet. In der Tabelle 3 ist der Mittelwert sowie die Standardabweichung für diese

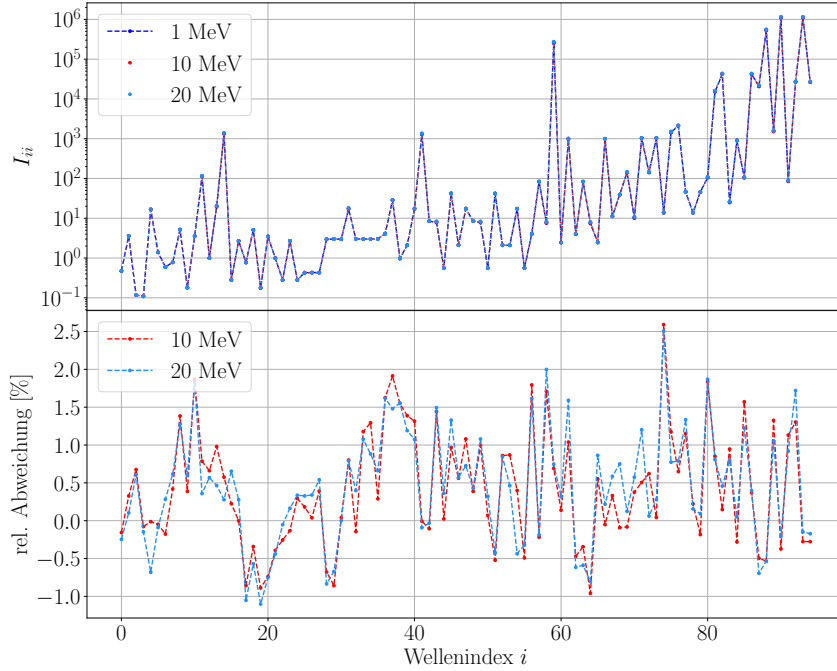


Abbildung 22: Diagonalmatrixelemente bei einer Masse von  $m = 1800$  MeV mit 50 000 Ereignissen für eine Binbreite von 1 MeV.

relative Abweichung aufgetragen. Durch den Vergleich der Werte in dieser Tabelle sowie mit der Abbildung 22 wird ersichtlich, dass durch die Erhöhung der Anzahl von Ereignissen die statistischen Fluktuationen und somit auch die Summationsunsicherheit minimiert werden kann. Durch den Vergleich beider Mittelwertdaten ergibt sich ein ungefähres Verhalten von  $1/\sqrt{N}$ , wobei dieses Verhalten aufgrund der sehr geringen Datendichte als Vermutung betrachtet werden muss.

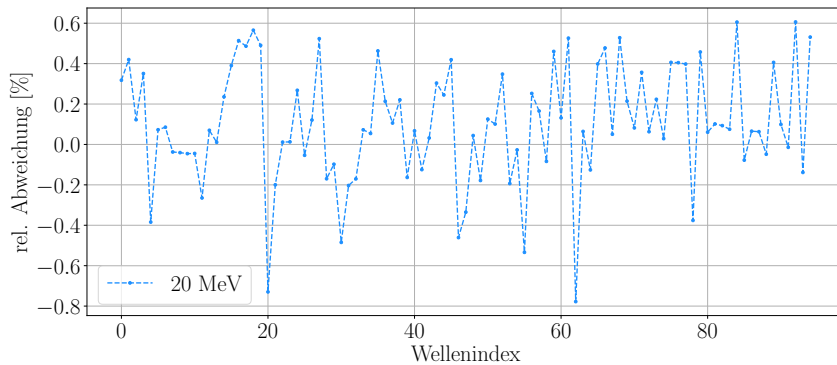


Abbildung 23: Relative Abweichung der Diagonalmatrixelemente bei einer Masse von  $m = 1800$  MeV mit  $10^6$  Ereignissen für eine Binbreite von 1 MeV.

## 4.2 Modellierung

In Abschnitt 4.1 wird die  $m$ -Abhängigkeit der Integralmatrizen dargestellt. In diesem Abschnitt soll der Versuch unternommen werden, diese Abhängigkeit mithilfe einer Modellierung darzustellen. Die Herausforderung besteht nun, ein geeignetes Modell zu finden, welches den Verlauf passend beschreibt. Eine zusätzliche Schwierigkeit ist das verschiedenartige Verhalten der Wellen, weswegen die Modellierung auf die Diagonalelemente fokussiert werden soll. In Abbildung 24 ist eine

Anzahl der Ereignisse	Mittelwert [%]	Standardabweichung
$5 \cdot 10^4$	0,44	0,74
$1 \cdot 10^6$	0,10	0,29

Tabelle 3: Mittelwert und Standardabweichung von der Unsicherheit für eine Massenbreite von 20 MeV

erste Möglichkeit aufgetragen. Im oberen Graph ist der Verlauf des Integralmatrixelements in Abhängigkeit der Masse dargestellt, und im unteren Graph die relative Abweichung des Modells. Für die dargestellte Welle stimmt das Modell über den ganzen Massenbereich gut mit den realen Werten überein. Insgesamt beträgt die maximale Unsicherheit  $\Delta I \approx 1\%$ .

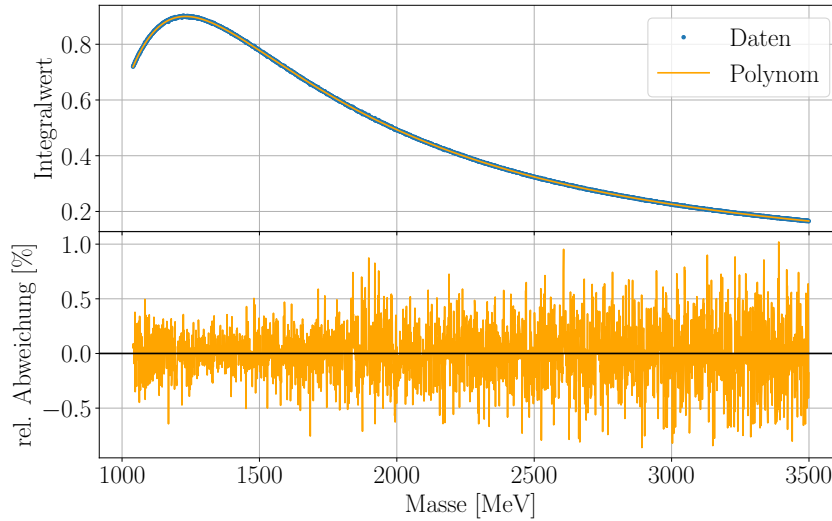


Abbildung 24: Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle  $0^{-+} 0^{+} \rho(770) \pi P$ .

In Abbildung 25 ist ein Nachteil der Polynom-Modells zu sehen. Ab einen Massewert von 2000 MeV sind die Unsicherheit der Modellierung klein, darunter sind jedoch große Schwankungen zu erkennen. Dieses Problem muss für jede Welle einzeln betrachtet und interpretiert werden, ob dieses Phänomen auf das aktuelle Ziel einen negativen Einfluss besitzt.

Für die in Abbildung 26 dargestellte Welle ist dieses Problem nicht nur auf den Randbereich beschränkt, sondern verläuft über den gesamten Massenbereich. Es ist ein generelles Problem bei einem Polynommodell, dass langsam steigende oder fallende Verläufe nur ungenügend dargestellt werden können.

Aus diesem Grund soll nun ein alternatives Modell getestet werden. Da der Verlauf der Integralmatrix für jede einzelne Welle verschieden ist, ist es schwierig, ein allgemeines Verhalten vorherzusagen. Jedoch kann aber für alle Wellen behauptet werden, dass der Bereich nach dem Maximum ein Verhalten ähnlich

$$f(m) = \frac{A}{m^r} \quad (34)$$

besitzt. Für diese in Abbildung 27 dargestellte Welle stimmen die Integralwerte und das Modell gut überein, welches anhand der geringen Abweichung von maximal 5% ersichtlich ist.

Weiterhin soll nun auch der Bereich bis zum Maximum untersucht werden. In Abbildung 27 wurde dieser Bereich durch die sogenannte Sigmoid-Funktion interpoliert.

$$f(m) = \frac{1}{1 + e^{-m}} \quad (35)$$



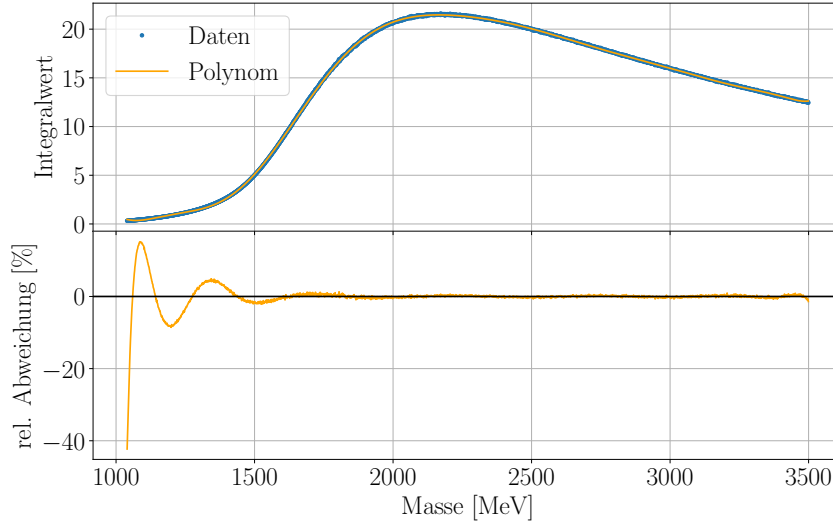


Abbildung 25: Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle  $0^{-+} 0^{+} f_2(1270) \pi D$ .

Die Sigmoid Funktion ist eine monotone steigende Funktion, die Stufenfunktion approximieren kann. Da die Integrale der Wellen keinen klar definierten Sprung, sondern einen breiten Bereich mit steigenden Werten aufweist, muss die Sigmoid-Funktion an diesen Verlauf angepasst werden. Eine Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass die Integralwerte ein Maximum aufweisen und danach abfallen, wohingegen die Sigmoid-Funktion ein asymptotisches Verhalten zeigt [10, 13]. Dieses Problem soll jedoch vorläufig ignoriert werden, wobei bis 2 GeV das Modell

$$f(x) = \frac{A}{1 + e^{-B \cdot (x-x_0)}} \quad (36)$$

verwendet wird und darüber das zuvor besprochene  $f(m) = A/m^r$  Modell angewendet. Dies ist in Abbildung 27 gezeigt. Hierbei ist erneut in dem oberen Diagramm der Verlauf der Integralmatrix mit den zwei Modellierungssmodellen, im unteren Diagramm die relative Abweichung aufgetragen.

Daraus wird ersichtlich, dass das Modell prinzipiell geeignet ist, um den Verlauf der Integralmatrix nachzubilden. Die Herausforderung besteht darin, durch eine mögliche Parametrisierung den Verlauf zwischen dem Sigmoid- und dem Potenz-Modell zu verbessern. Die Wahl, ob das Polynom- oder das Sigmoid/Potenz-Modell die Daten besser beschreibt, kann allgemein nicht befriedigend beantwortet werden. Vielmehr muss die Frage bei jeder Welle einzeln nach den vorhandenen Gegebenheiten wie die Massenintervallbreite neu evaluiert werden.

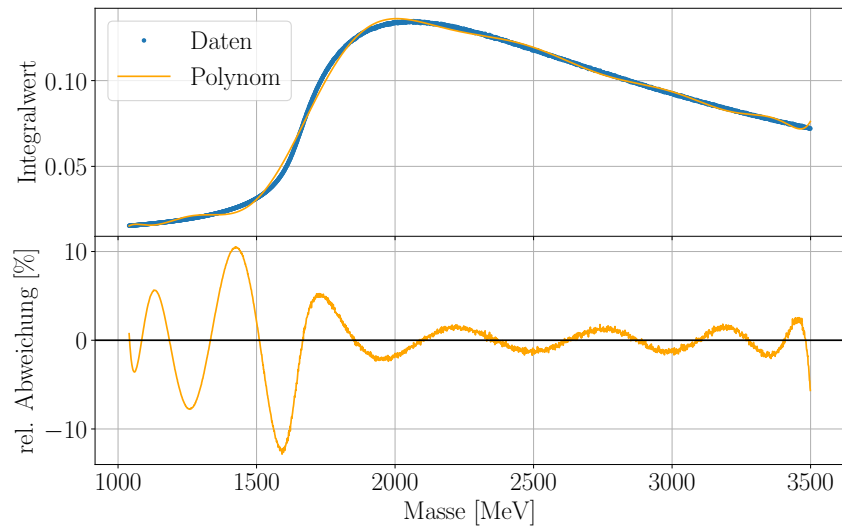


Abbildung 26: Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle  $0^{-+} 0^{+} f_0(1500) \pi S$ .

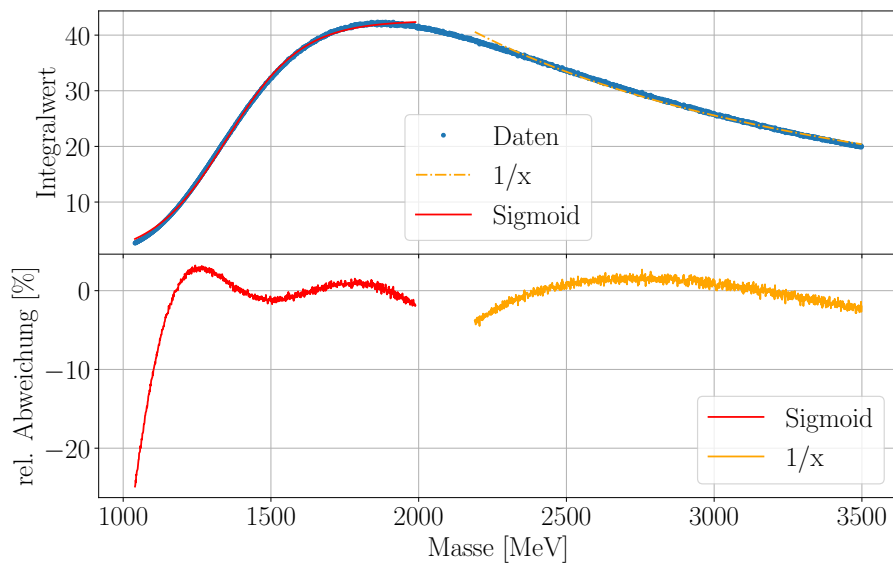


Abbildung 27: Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Sigmoidmodells/Potenzgesetz für die Welle  $2^{-+} 1^{+} \rho(770) \pi F$ .

## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die in dem Partialwellenanalyse-Programm ROOTPWA implementierte Berechnung der Integralmatrix mittels der MC-Methode näher betrachtet. In dem Abschnitt 2 wurde die bisher verwendete Methode zur Berechnung der Normierungsintegrale dahingehend erweitert, dass die Unsicherheit, die durch die Monte-Carlo-Integration hervorgerufen wird, ebenfalls ermittelt wird. Diese Unsicherheit wurde einerseits über die Modellierung der Verteilung der Integralwerte mit Gaußverteilung, und andererseits über die Formel (18) bestimmt, die einen theoretischen Zusammenhang zwischen der Unsicherheit und der Anzahl der Ereignisse liefert. Zwischen diesen beiden Methoden wurde eine maximale relative Abweichung von ungefähr 5% ermittelt. Darüber hinaus wurde das Verhalten der Unsicherheit der Integralmatrixelemente als Funktion der Ereignisanzahl  $N$  in der MC-Integration betrachtet. Wie in Abbildung 7 und 8 gezeigt, kann das erwartete  $1/\sqrt{N}$  Verhalten mit einer Abweichung von kleiner 10% bestätigt werden, wobei die größten Abweichungen bei kleinen  $N$  beobachtet werden.

Im Folgenden wurde der Einfluss der Unsicherheit der Integralmatrixelemente auf das Ergebnis der Partialwellenanalyse anhand der Intensitäten der Partialwellenamplituden betrachtet. Hierbei wurden verschiedene Methoden angewandt, die übereinstimmend die Fehlerfortpflanzung beschreiben. Darüber hinaus wurde auch eine weitere Methode kurz betrachtet, welche die vorhandenen Daten effizient verwendet und darum ohne große Aufwände benutzt werden kann.

In der Abbildung 12 ist das in Formel (22) beschriebene Verhältnis als Funktion der Ereignissanzahl aufgetragen. Das Verhältnis wurde so definiert, dass, wenn eine Welle betrachtet wird, im Zähler die Standardabweichung von den Intensitätswerten berechnet wird.  $\sigma(\mathcal{I}_i)$  beschreibt also die totale Intensitätsunsicherheit einer Welle. Um die Stärke der Schwankung abschätzen zu können, muss diese mit der Unsicherheit, die durch die MLE-Methode abgeschätzt wird, verglichen werden, wobei als Referenz die mittlere Unsicherheit über eine Welle verwendet wurde. Hierbei ist ersichtlich, dass mit einer steigenden Anzahl von Ereignissen das Verhältnis für alle Wellen immer kleiner wird. Eine Erkenntnis aus dieser Studie ist, dass bei wenig betrachteten Ereignissen in der MC-Integration, die MLE Erwartungswerte für die Unsicherheit verzerrt sind und somit immer eine Mindestanzahl von Ereignissen in der MC-Integration benötigt werden. Der Verlauf der Unsicherheit  $R_i$  in Abhängigkeit der Ereignissanzahl wird allgemein durch  $A + B/n^r$  beschrieben, wobei die erste Annahme ist, dass  $r \approx 1/2$  gilt, jedoch wird experimentell ein Wert von 1,19 bestimmt. Dieser Abweichung lässt sich durch den oben beschriebenen Verzerrungen erklären. Der Einfluss auf den in Formel (23) beschriebenen Exponenten ist unerwartet, und der Verlauf bei einer höheren Anzahl von Ereignissen ist für weitere Untersuchungen ein guter Ansatzpunkt. Eine weitere Erkenntnis ist, dass das oben beschriebene Verhältnis von der 3-Pionenmasse abhängig ist. Für ein besseres Verständnis sind weitere Untersuchungen notwendig.

Der Wert der Integralmatrix ist einerseits durch die Kombination der Wellen, andererseits durch die betrachtete  $3\pi$  Masse bestimmt. Die Abhängigkeit der Integralelemente von der 3-Pionenmasse ist in Abschnitt 4.1 untersucht worden. Dabei zeigt sich ein vielfältiges Verhalten und die hier gezeigten Verläufe stellen nur eine kleine Auswahl dar. Weiterhin wurde eine Möglichkeit erarbeitet, die Integralmatrix flexibler und effizienter an verschiedenen Binnings der analytischen Daten anzupassen. Das Grundprinzip beruht darauf, dass mithilfe einer allgemeingültigen Matrix, die mit einem kleinen Binning ermittelt wird, die aktuell benötigten Werte für ein größeres Binning einfach berechnet werden können.

In dem Abschnitt 4.2 wird an das Problem anders herangegangen, es ist die Modellierung der diagonale Integralmatrixelemente von der Integralmatrix aufgetragen. Hierbei wurden zwei verschiedenen Modelle miteinander verglichen. Der Vorteil bei eines Polynommodells liegt in der Einfachheit des Modells. Hierbei muss neben den Parameterwerte der optimale Polynomgrad ermittelt werden, wobei in diesem Fall für das Optimum zwischen Rechendauer und Fitgüte ein Polynom 13. Grades ermittelt wurde. Ein weiterer Vorteil ist, dass für die Optimierung nur die Lösung eines Gleichungssystems erforderlich ist, welches für den Computer leicht durchführbar ist. Das Sigmoid/Potenzgesetz-Modell zieht seine Berechtigung daraus, dass der Verlauf der einzelnen Komponenten besser zu dem theoretischen Integralverlauf passt. Der Nachteil dieser Methode besteht jedoch darin, dass eine geeignete Verbindung zwischen den beiden Komponenten gefunden werden muss, und außerdem ist das Optimieren der nichtlinearen Funktionen aufwendiger als im

Polynommodel.

## Abbildungsverzeichnis

1	Allgemeiner Erzeugungsprozess für den Zwischenzustand $X$ , mit Zerfall in $n$ -Tochtereilchen [4] . . . . .	2
2	Detaillierte Darstellung des Zerfall von dem Zwischenzustandes $X$ in drei geladene Pionen. . . . .	3
3	Graphische Darstellung der Maximum Likelihood Estimation [7]. . . . .	5
4	Verteilung von den Werten des Integralmatrixelements $I_{ij}$ für eine ausgesuchte Wellenkombination . . . . .	9
5	Absolute relative Abweichung der Standardabweichung von MLE- und Scipy-Optimierung. Für den Imaginärteil sind die Diagonalelemente nicht definiert, da diese nur ein Realteil besitzen. Dies lässt sich leicht plausibel machen, indem dieser Spezialfall explizit betrachtet wird: $\Psi_i \Psi_i^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ . . . . .	10
6	Relative Abweichung der berechneten Unsicherheit aus der Monte-Carlo-Methode und der Grenzwertsatzmethode. Zur Übersichtlichkeit sind die Absolutwerte aufgetragen. . . . .	11
7	Normierter Verlauf der Monte-Carlo-Unsicherheit für die in Abbildung 4 beschriebene Wellenkombination in Abhängigkeit von den Anzahl der Ereignisse. . . . .	12
8	Darstellung des maximalen, normierten Residuums pro Welle. . . . .	13
9	MLE für die Intensität der $0^{-+} 0^+ f_0(1500) \pi$ S Welle mit Integralmatrizen, die mit unterschiedlichen zufälligen Phasenraumdatensätzen generiert werden. . . . .	14
10	MLE für die Intensitätsunsicherheit der $0^{-+} 0^+ f_0(1500) \pi$ S Welle mit unterschiedlichen Integralmatrizen. . . . .	14
11	Verhältnis $R_i$ aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells. . . . .	15
12	Abhängigkeit des Verhältnisses $R_i$ aus der Formel (22) von der Anzahl in der MC-Integration benutzten Ereignisse. . . . .	15
13	Exponent $r_i$ in Formel (23) für alle 88 Wellen des PWA-Modells. . . . .	16
14	Verhältnis $R_i$ aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells für $m_{3\pi} = 1000$ . . . . .	16
15	Doppelverhältnis aus Formel (24) für alle 88 Wellen des PWA-Modells. . . . .	17
16	Verhältnis $R_i$ aus Formel (22) für alle 88 Wellen des PWA-Modells, berechnet durch die Jackknife-Methode. . . . .	18
17	Doppelverhältnis aus Formel (31) für alle betrachteten Wellen. . . . .	18
18	Verlauf der in Formel (22) vorkommenden Standardabweichung $\sigma(\mathcal{I}_i)$ , jeweils für kongruente und variierende Startparameter. . . . .	19
19	Verhältnis der in Abbildung 18 dargestellten Werte laut Formel (32). . . . .	20
20	Darstellung von dem in Formel (22) beschriebenem Verhältnis für unterschiedliche Startparameter. . . . .	20
21	Verlauf der Integralmatrix in Abhängigkeit der Masse. . . . .	21
22	Diagonalmatrixelemente bei einer Masse von $m = 1800$ MeV mit 50 000 Ereignissen für eine Binbreite von 1 MeV. . . . .	22
23	Relative Abweichung der Diagonalmatrixelemente bei einer Masse von $m = 1800$ MeV mit $10^6$ Ereignissen für eine Binbreite von 1 MeV. . . . .	22
24	Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle $0^{-+} 0^+ \rho(770) \pi$ P. . . . .	23

25	Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle $0^{-+} 0^{+} f_2(1270) \pi D$ . . . . .	24
26	Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Polynommodells 13-Ordnung für die Welle $0^{-+} 0^{+} f_0(1500) \pi S$ . . . . .	25
27	Modellierung des diagonalen Integralmatrixelements mithilfe des Sigmoidmodells/Potenzgesetz für die Welle $2^{-+} 1^{+} \rho(770) \pi F$ . . . . .	25

## Tabellenverzeichnis

1	Parameterwerte für die Verteilung der Integralmatrixwerte. . . . .	9
2	Mittelwert für die in Abbildung 15 dargestellten Verhältnisse. . . . .	16
3	Mittelwert und Standardabweichung von der Unsicherheit für eine Massenbreite von 20 MeV . . . . .	23

## Literatur

- [1] P. Abbon u. a. „The COMPASS experiment at CERN“. In: *Nucl. Instrum. Meth.* A577 (2007), S. 455–518. DOI: 10.1016/j.nima.2007.03.026. arXiv: hep-ex/0703049 [hep-ex].
- [2] Ph. Abbon u. a. „The COMPASS Setup for Physics with Hadron Beams“. In: *Nucl. Instrum. Meth.* A779 (2015), S. 69–115. DOI: 10.1016/j.nima.2015.01.035. arXiv: 1410.1797 [physics.ins-det].
- [3] C. Adolph u. a. „Resonance production and  $\pi\pi$   $S$ -wave in  $\pi^{-} + p \rightarrow \pi^{-}\pi^{-}\pi^{+} + p_{\text{recoil}}$  at 190 GeV/c“. In: *Phys. Rev. D* 95 (3 Feb. 2017), S. 032004. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.032004. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.032004>.
- [4] D. Ryabchikov B. Ketzler B. Grube. „Light-Meson Spectroscopy with COMPASS“. Apr. 2019.
- [5] Igor Babuschkin. *python-mle*. <https://github.com/ibab/python-mle>. 2019.
- [6] Hakwa Brice. „Zufallsprozesse und stochastische Integration“. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~ruediger/pages/lehre/ss12/zf/MC.pdf>.
- [7] Jonny Brooks-Bartlett. *Probability concepts explained: Maximum likelihood estimation*. Jan. 2018. URL: <https://towardsdatascience.com/probability-concepts-explained-maximum-likelihood-estimation-c7b4342fddb1>.
- [8] Herrmann Dietmar und Anzing. *Monte-Carlo-Integration*. Okt. 2010. URL: [https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang12-92/heft1/1992-1\\_herrmann.pdf](https://www.stochastik-in-der-schule.de/sisonline/struktur/jahrgang12-92/heft1/1992-1_herrmann.pdf) (besucht am 18.08.2019).
- [9] B. Efron. *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial und Applied Mathematics, 1982. ISBN: 9780898711790.
- [10] Weisstein Eric W. *Sigmoid Function*. URL: <http://mathworld.wolfram.com/SigmoidFunction.html> (besucht am 23.08.2019).
- [11] R. Frühwirth und M. Regler. *Monte-Carlo-Methoden: eine Einführung*. Bibliographisches Institut, 1983. ISBN: 9783411016570.
- [12] Huang. *Jackknife-Bootstrap*. Nov. 2003. URL: <https://www.stat.berkeley.edu/~hhuang/STAT152/Jackknife-Bootstrap.pdf> (besucht am 23.08.2019).
- [13] Mark Humphrys. *Sigmoid activation function*. URL: <https://www.computing.dcu.ie/~humphrys/Notes/Neural/sigmoid.html> (besucht am 23.08.2019).
- [14] J. D. Hunter. „Matplotlib: A 2D graphics environment“. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.

- 
- [15] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. [Online; accessed 23.08.2019]. 2001–2019. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [16] Eckhardt K. *Logarithmische Skalen*. URL: [https://www120.uni-hohenheim.de/Downloads/Log\\_Papier/Logarithmische\\_Skalen.pdf](https://www120.uni-hohenheim.de/Downloads/Log_Papier/Logarithmische_Skalen.pdf) (besucht am 11.08.2019).
- [17] Thomas Kluyver u. a. „Jupyter Notebooks – a publishing format for reproducible computational workflows“. In: *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*. Hrsg. von F. Loizides und B. Schmidt. IOS Press. 2016, S. 87–90.
- [18] T. Müller-Gronbach, E. Novak und K. Ritter. *Monte Carlo-Algorithmen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783540891413.
- [19] Travis Oliphant. *NumPy: A guide to NumPy*. USA: Trelgol Publishing. [Online; accessed 23.08.2019]. 2006–2019. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [20] B. Povh u. a. *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642378225.
- [21] ROOTPWA-Maintainers. *ROOTPWA*. <https://github.com/ROOTPWA-Maintainers/ROOTPWA>. 2019.
- [22] J. Shao und D. Tu. *The Jackknife and Bootstrap*. Springer Series in Statistics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461207955. (Besucht am 23.08.2019).
- [23] Ole Tange. *GNU Parallel 2018*. Ole Tange, März 2018. ISBN: 9781387509881. DOI: 10.5281/zenodo.1146014. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1146014>.

## A Verwendete Programme

Im Folgenden soll eine kurze Zusammenfassung der für dieses Projekt benötigten Programme dargestellt werden.

In einigen Fällen ist es notwendig, die vorhanden Skripte mit minimal veränderten Startparameter zu betreiben. Hierfür bietet sich das bash-Programm `parallel` an [23], welches die Möglichkeit eröffnet, die Skripte durch Multi-Processing simultan auszuführen. Die Programme, die für die Auswertung der Daten entwickelt worden sind, sind in Python 2.7 verfasst, wobei zur Erstellung `Jupyter Notebook` [17] verwendet wurde. Zur Berechnung und Auswertung der Datensätze wurden in Python das Module `NumPy` [19] sowie `SciPy` [15], für die grafischen Darstellung der Daten das Module `Matplotlib` [14] verwendet. In Abschnitt 2 wird die Maximum-Likelihood-Estimation zur Berechnung der Integralmatrix verwendet, wobei in Python das Modul `python-mle` [5] zur Anwendung kommt.